Summenregel, Differenzregel & Faktorregel

Für alle differenzierbaren Funktionen f und g gelten die folgenden Ableitungsregeln:

Summenregel: $s(x) = f(x) + g(x) \implies s'(x) = f'(x) + g'(x)$

Differenzregel: $d(x) = f(x) - g(x) \implies d'(x) = f'(x) - g'(x)$

Faktorregel: $m(x) = c \cdot f(x) \implies m'(x) = c \cdot f'(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$

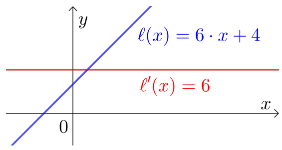
Differenzieren mit Ableitungsregeln

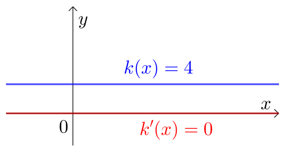
Wir haben die folgende Ableitungsfunktion direkt aus der Definition ermittelt:

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4 \implies f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cdots = 6 \cdot x + 6$$

Mit den Ableitungsregeln und $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ können wir diese Ableitungsfunktion direkt ermitteln:

$$f'(x) = (3 \cdot x^2)' + (6 \cdot x + 4)' = 3 \cdot (x^2)' + 6 = 6 \cdot x + 6$$





Rechts sind die folgenden beiden Begründungen für $(6 \cdot x + 4)' = 6$ grafisch veranschaulicht:

i) Die lineare Funktion ℓ mit $\ell(x) = 6 \cdot x + 4$ hat an jeder Stelle die Steigung 6. $\implies \ell'(x) = 6$

ii) Die konstante Funktion k mit $k(x) = 4$ hat an jeder Stelle die Steigung 0. $\implies k'(x) = 0$

$\implies (6 \cdot x + 4)' = 6 \cdot (x^1)' + (4)' = 6 \cdot 1 \cdot x^0 + 0 = 6$

Ableitungen von Polynomfunktionen

Ermittle jeweils die Ableitungsfunktion der Polynomfunktion mithilfe der Ableitungsregeln.

a) $a(x) = 6 \cdot x^7 + 5 \cdot x^3 \implies a'(x) = 42 \cdot x^6 + 15 \cdot x^2$

b) $b(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + x^2 - 3 \cdot x + 5 \implies b'(x) = 12 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 3$

c) $c(x) = \frac{5}{3} \cdot x^7 - \frac{3}{8} \cdot x^4 + \frac{1}{4} \cdot x^2 - 3 \implies c'(x) = \frac{35}{3} \cdot x^6 - \frac{3}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x$

d) $d(x) = -\frac{3}{2} \cdot x^6 + x^3 - x \implies d'(x) = -9 \cdot x^5 + 3 \cdot x^2 - 1$

Faktorregel

Patrick meint: „*Die Ableitung von x^2 ist $2 \cdot x$ und die Ableitung von x^3 ist $3 \cdot x^2$.
Also ist die Ableitung von $x^2 \cdot x^3$ gleich $(2 \cdot x) \cdot (3 \cdot x^2) = 6 \cdot x^3$.*“

Begründe, warum diese Aussage *falsch* sein muss.

Es gilt: $x^2 \cdot x^3 = x^5$

$$\implies (x^2 \cdot x^3)' = (x^5)' = 5 \cdot x^4$$

Da im Allgemeinen $6 \cdot x^3 \neq 5 \cdot x^4$ gilt (z.B. an der Stelle $x = 1$), muss Patricks Aussage falsch sein.

Ableitungen von Potenz- und Wurzelfunktionen

Für die Ableitungsfunktion der Potenzfunktion $\boldsymbol{f(x) = x^r}$ mit $r \in \mathbb{R}$ gilt: $\boldsymbol{f'(x) = r \cdot x^{r-1}}$

Erinnere dich, dass $\boldsymbol{\frac{1}{x^r} = x^{-r}}$ bzw. $\boldsymbol{\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}}$ gilt.

Diese Ableitungsregel kannst du also auch auf alle Wurzelfunktionen anwenden.

Ableitungen von Potenz- und Wurzelfunktionen

Ermittle jeweils die Ableitungsfunktion mithilfe der Ableitungsregeln.

a) $a(x) = x^\pi$ **b)** $b(x) = \frac{5}{x^2}$ **c)** $c(x) = \frac{2}{3 \cdot x}$ **d)** $d(x) = \sqrt{x}$ **e)** $e(x) = \sqrt[4]{x^3}$

a) $a'(x) = \pi \cdot x^{\pi - 1}$

b) $b(x) = 5 \cdot \frac{1}{x^2} = 5 \cdot x^{-2} \implies b'(x) = -10 \cdot x^{-3} = \frac{-10}{x^3}$

c) $c(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \cdot x^{-1} \implies c'(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^{-2} = \frac{-2}{3 \cdot x^{-2}}$

d) $d(x) = x^{\frac{1}{2}} \implies d'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

e) $e(x) = x^{\frac{3}{4}} \implies e'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$

Ableitungen von Exponential- und Logarithmusfunktionen

Für die Ableitungsfunktion der Exponentialfunktion $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ gilt: $\boldsymbol{f'(x) = a^x \cdot \ln(a)}$

Für die Ableitungsfunktion der Logarithmusfunktion $\boldsymbol{g(x) = \log_a(x)}$ gilt: $\boldsymbol{g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}}$

Basis e

Wenn die Basis a die Eulersche Zahl $e = 2{,}718\,28...$ ist, dann gilt also:

$$f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} = e^x \qquad g(x) = \ln(x) \implies g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(e)} = \frac{1}{x}$$

Ableitungen von Exponential- und Logarithmusfunktionen

Ermittle jeweils die Ableitungsfunktion mithilfe der Ableitungsregeln.

a) $f(x) = 4 \cdot e^x - 5 \cdot x^e + \frac{2}{3} \cdot \ln(x)$ **b)** $g(x) = 4 \cdot 2^x - \frac{5}{3^x} + \lg(x)$

a) $f'(x) = 4 \cdot e^x - 5 \cdot e \cdot x^{e-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$

b) $g(x) = 4 \cdot 2^x - 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + \log_{10}(x)$

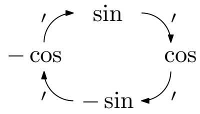
$$\implies g'(x) = 4 \cdot \ln(2) \cdot 2^x - 5 \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$$

Ableitungen von Winkelfunktionen

Für die Ableitungsfunktion von $\boldsymbol{f(x) = \sin(x)}$ gilt: $\boldsymbol{f'(x) = \cos(x)}$

Für die Ableitungsfunktion von $\boldsymbol{g(x) = \cos(x)}$ gilt: $\boldsymbol{g'(x) = -\sin(x)}$

Für die Ableitungsfunktion von $\boldsymbol{h(x) = \tan(x)}$ gilt: $\boldsymbol{h'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}$



⚠ Damit diese Ableitungsregeln für Winkelfunktionen stimmen, muss der Winkel x im Bogenmaß gemessen sein.

Ableitungen von Winkelfunktionen

Ermittle die Ableitungsfunktion von $f(x) = 0{,}2 \cdot \sin(x) - \dfrac{\cos(x)}{3} + \dfrac{4 \cdot \sin(x)}{\cos(x)}$.

$$f(x) = 0{,}2 \cdot \sin(x) - \frac{1}{3} \cdot \cos(x) + 4 \cdot \tan(x)$$

$$\implies f'(x) = 0{,}2 \cdot \cos(x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(x) + \frac{4}{\cos^2(x)}$$

Produktregel, Quotientenregel & Kettenregel

Die Ableitungsfunktion von $p(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ ist *nicht* $x \mapsto 2 \cdot x \cdot \cos(x)$.

Die Ableitungsfunktion von $q(x) = \dfrac{x^2}{\sin(x)}$ ist *nicht* $x \mapsto \dfrac{2 \cdot x}{\cos(x)}$.

Die Ableitungsfunktion von $k(x) = \sin(x^2)$ ist *nicht* $x \mapsto \cos(2 \cdot x)$.

Die *richtigen* Ableitungsfunktionen erhalten wir mit der Produkt-, Quotienten- bzw. Kettenregel.

Produktregel

Die Ableitungsfunktion von $\boldsymbol{p(x) = a(x) \cdot b(x)}$ ermitteln wir mit der **Produktregel**:

$$\boldsymbol{p'(x) = a'(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot b'(x)}$$

Zum Beispiel: $p(x) = \underbrace{x^2}_{a(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{b(x)} \implies p'(x) = \underbrace{2 \cdot x}_{a'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{b(x)} + \underbrace{x^2}_{a(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{b'(x)}$

Produktregel

Ermittle die Ableitungsfunktion von $p(x) = 5 \cdot x^3 \cdot \ln(x) + 2 \cdot \cos(x) \cdot e^x$.

$$p'(x) = 15 \cdot x^2 \cdot \ln(x) + 5 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x} + (-2) \cdot \sin(x) \cdot e^x + 2 \cdot \cos(x) \cdot e^x =$$

$$= 15 \cdot x^2 \cdot \ln(x) + 5 \cdot x^2 - 2 \cdot \sin(x) \cdot e^x + 2 \cdot \cos(x) \cdot e^x$$

Quotientenregel

Die Ableitungsfunktion von $\boldsymbol{q(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}}$ ermitteln wir mit der **Quotientenregel**:

$$\boldsymbol{q'(x) = \frac{a'(x) \cdot b(x) - a(x) \cdot b'(x)}{b(x)^2}}$$

Zum Beispiel: $q(x) = \dfrac{x^2}{\sin(x)} \implies q'(x) = \dfrac{2 \cdot x \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$

Quotientenregel

Ermittle die Ableitungsfunktion von $q(x) = \dfrac{3 \cdot x - 1}{x^2 + 1}$ und vereinfache so weit wie möglich.

$$q'(x) = \frac{3 \cdot (x^2+1) - (3 \cdot x - 1) \cdot 2 \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{3 \cdot x^2 + 3 - 6 \cdot x^2 + 2 \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3}{(x^2+1)^2}$$

Kettenregel

Die Ableitungsfunktion von $\boldsymbol{k(x) = f(g(x))}$ ermitteln wir mit der **Kettenregel**:

$$\boldsymbol{k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Zum Beispiel: $k(x) = \sin(x^2) \implies k'(x) = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x$

Bei dieser Funktion k steckt nämlich eine quadratische Funktion in der Sinusfunktion:

Innere Funktion:	$g(x) = x^2$	$\implies$	$g'(x) = 2 \cdot x$
Äußere Funktion:	$f(☺) = \sin(☺)$	$\implies$	$f'(☺) = \cos(☺)$

$k(x) = f(g(x)) = \sin(x^2) \implies k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x$

Kettenregel

Ermittle die Ableitungsfunktion von $k(x) = \ln(4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4)$.

$$k'(x) = \frac{1}{4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4} \cdot (8 \cdot x - 5) = \frac{8 \cdot x - 5}{4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4}$$

Drei Wege, ein Ziel

Ermittle die Ableitungsfunktion von $f(x) = (4 \cdot x - 2)^2$ ...

1) ... mit der Kettenregel. **2)** ... mit der Produktregel. **3)** ... indem du zuerst ausmultiplizierst.

1) $f(x) = (4 \cdot x - 2)^2 \rightsquigarrow$ Kettenregel

$\implies f'(x) = 2 \cdot (4 \cdot x - 2)^1 \cdot 4 = 32 \cdot x - 16$

2) $f(x) = (4 \cdot x - 2) \cdot (4 \cdot x - 2) \rightsquigarrow$ Produktregel

$\implies f'(x) = 4 \cdot (4 \cdot x - 2) + (4 \cdot x - 2) \cdot 4 = 16 \cdot x - 8 + 16 \cdot x - 8 = 32 \cdot x - 16$

3) $f(x) = 16 \cdot x^2 - 16 \cdot x + 4$

$\implies f'(x) = 32 \cdot x - 16$