

Satz von Pick – Level 2

Was wird benötigt?

Geobrett und Gummiringerl

Stift und Papier

vorgefertigte Tabelle

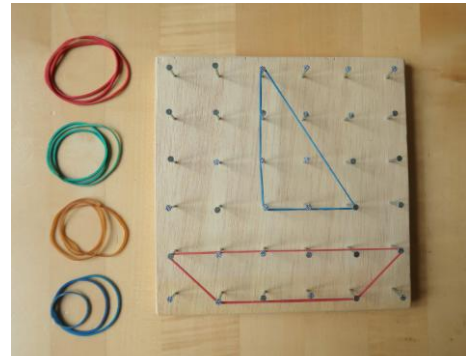
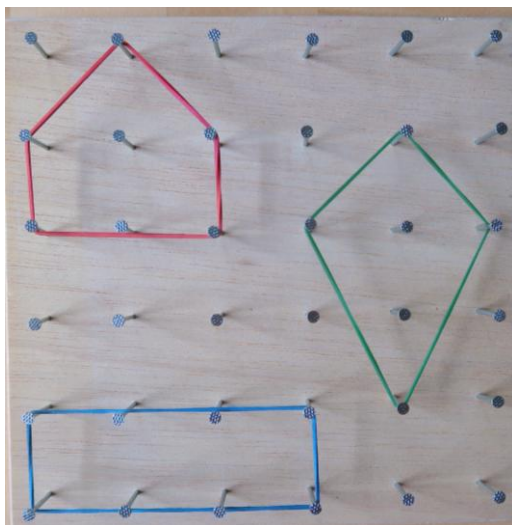


Abbildung 1

Worum geht's?

Mit Hilfe des Satzes von Pick kann der Flächeninhalt von Figuren, die auf dem Geobrett gespannt wurden, berechnet werden.

- Spanne Figuren auf dem Geobrett.
- Ermittle die Anzahl der Rand- und Innenpunkte.
- Finde den Flächeninhalt nach der Formel von Pick.

Arbeitsanweisungen

1. Spanne mit den Gummiringerln auf dem Geobrett die drei Figuren, die in der Abbildung 1 zu sehen sind.
2. Bestimme die Anzahl der Randpunkte (R) und die Anzahl der Innenpunkte (I) der einzelnen Figuren. Notiere die Ergebnisse in der dafür vorgesehenen Tabelle.



Randpunkte werden von den Gummiringerln berührt. Innenpunkte liegen im Inneren der Figur und werden von keinem Gummiringerl berührt.

3. Überlege, wie groß jeweils der Flächeninhalt (A) jeder einzelnen Figur ist und notiere deine Schätzung in der Tabelle.

Hier geht's weiter!

9. Spanne nun auf dem Geobrett Figuren, die die folgenden Eigenschaften haben:

Randpunkte R	Innenpunkte I
4	0
4	1
6	0
6	2

10. Überlege, wie groß jeweils der Flächeninhalt dieser Figuren ist und ergänze die Werte in deiner Tabelle.

Ein paar Schritte sind noch zu machen ...

4. Spanne nun fünf beliebige weitere Figuren.
5. Zähle von jeder dieser neuen Figuren die Anzahl der Randpunkte (R) und die Anzahl der Innenpunkte (I).
6. Schätze wieder die Größe der einzelnen Flächeninhalte (A) und notiere deine Ergebnisse ebenfalls in der Tabelle.
7. Erkennst du einen Zusammenhang zwischen R und A? Stelle eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts in Abhängigkeit von der Anzahl der Randpunkte (R) auf. Betrachte dafür deine Notizen in der Tabelle.
8. Wie musst du diese Formel verändern, wenn du nun Figuren betrachtest, die auch Innenpunkte haben? Verändere deine Formel so, dass sie jetzt für den Flächeninhalt aller Figuren gültig ist.

Lösungsweg

Berechnung von Flächen am Geobrett mit Hilfe des Satzes von Pick

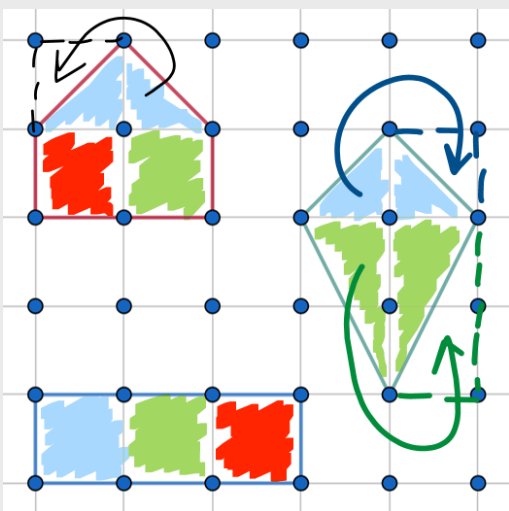
Der österreichische Mathematiker Georg Alexander von Pick widmete sich der Berechnung des Flächeninhalts von Figuren mit ganzzahligen Koordinaten (Gitterpunkte).

Schauen wir uns nun den Lösungsweg der einzelnen Arbeitsschritte an.

Die drei Figuren, die in Abbildung 1 zu sehen sind, haben die folgende Anzahl an Rand- bzw. Innenpunkten:

- rote Figur: 6 Randpunkte, 1 Innenpunkt
- blaue Figur: 8 Randpunkte, 0 Innenpunkte
- grüne Figur: 4 Randpunkte, 2 Innenpunkte

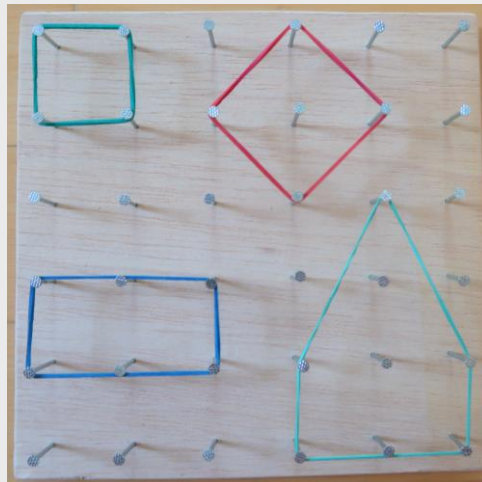
Der **Flächeninhalt** aller drei Figuren ist gleich groß, nämlich **3**. Besonders gut erkennst du das, wenn du die Dreiecke quasi „auseinanderschneidest“ und so verschiebst, dass sie einander zu Rechtecken ergänzen.



Rand- punkte R	Innen- punkte I	Flächen- inhalt A
6	1	3
8	0	3
4	2	3

Fortsetzung Lösungsweg

In Arbeitsschritt 4 musstest du Figuren spannen, wobei die Anzahl der Randpunkte und die Anzahl der Innenpunkte vorgegeben war. Diese Figuren könnten beispielsweise so aussehen:



Von diesen Figuren musstest du ebenfalls den Flächeninhalt schätzen. Auch hier ist es wiederum hilfreich, die Dreiecke quasi zu drehen und zu Rechtecken zu ergänzen. Es ergeben sich so folgende Werte für die Flächeninhalte:

Randpunkte R	Innenpunkte I	Flächeninhalt A
4	0	1
4	1	2
6	0	2
6	2	4

In den letzten fünf Zeilen der großen Tabelle hat jede:r unterschiedliche Zahlen stehen, da du ja beliebige Figuren spannen durftest.

Fortsetzung Lösungsweg

Um eine Formel für den Flächeninhalt in Abhängigkeit von den Randpunkten zu finden, betrachten wir zuerst nur die Figuren, die keine Innenpunkte haben. Hat eine Figur keine Innenpunkte, so muss man die Anzahl der Randpunkte halbieren und dann noch 1 abziehen, um die Größe des Flächeninhalts zu erhalten. Es ergibt sich also die Formel:

$$A = \frac{R}{2} - 1$$

Um eine allgemeingültige Formel zu finden, müssen wir auch die Innenpunkte berücksichtigen. Hat eine Figur Innenpunkte, so muss man zusätzlich noch die Anzahl der Innenpunkte addieren.

Insgesamt gilt somit die folgende Flächeninhaltsformel:

$$A = \frac{R}{2} - 1 + I$$

A ... Flächeninhalt

R ... Anzahl der Randpunkte

I ... Anzahl der Innenpunkte

Wusstest du schon ...

Georg Alexander Pick war ein österreichischer Mathematiker, der von 1859-1942 lebte. Er war Professor in Wien und in Prag und beschäftigte sich mit vielen verschiedenen Bereichen der Mathematik – vor allem mit Geometrie.

Besonders bekannt wurde er durch den Satz von Pick, den er 1899 veröffentlichte. Mit Hilfe dieses Satzes kannst du den Flächeninhalt von Vielecken, die nur ganzzahlige Koordinaten (Gitterpunkte) haben, ganz einfach ermitteln.

Kopiervorlage Tabelle

Randpunkte R	Innenpunkte I	Flächeninhalt A

Kopiervorlage Gitterpunkte

