Zentral gestellte niederländische Reifeprüfung Mathematik; https://wiskunde-examens.nl

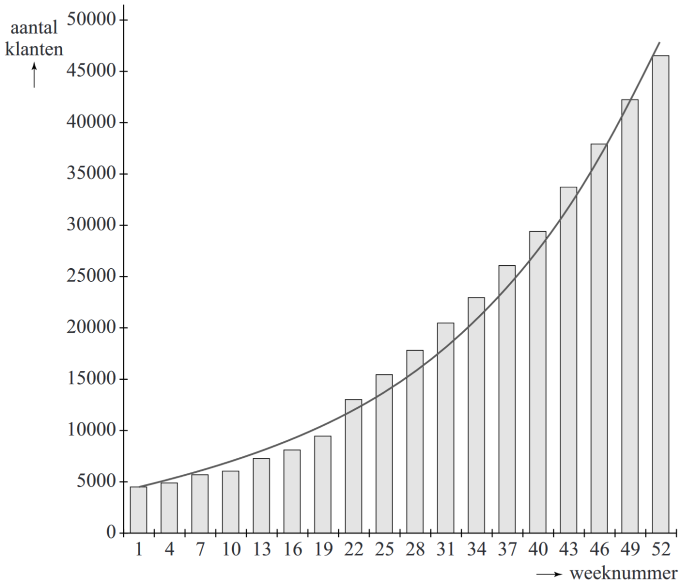
Wir stellen hier eine Übersetzung der Aufgabenstellungen der niederländischen Reifeprüfung Mathematik (vwo wiskunde A 2018) zur Verfügung. Die Übersetzung wurde vom *Mathematik macht Freu(n)de*-Team mit Unterstützung von *Google Translate* angefertigt. Die Originaldatei ist jeweils nach dem entsprechenden übersetzten Aufgabenblock eingebunden. Bilder und Grafiken wurden aus der Originaldatei in die Übersetzung direkt übernommen. Irrtümer vorbehalten.

VWO WISKUNDE A – 2. TERMIN 2018

Knab (Lösungen)

Knab ist ein recht neues Bankunternehmen, das 2012 als Tochterunternehmen von Aegon gegründet wurde. Am Anfang wuchs *Knab* nur langsam: Ende 2013 hatte die Bank nur 4500 Kunden. Deshalb wurde 2014 eine größere Veränderung beschlossen. Diese führte zu sofortigen Ergebnissen, da sich die Anzahl der Kunden 2014 verzehnfachte.

Siehe dazu die Abbildung. Diese Wert kann auch auf dem Graphen in der Beilage abgelesen werden.



Die Abbildung zeigt die Anzahl der Kunden alle drei Wochen anhand von Balken. Darüber hinaus wird der Graph eines exponentiellen Modells gezeichnet, das den tatsächlichen Zahlen sehr nahe kommt.

Das exponentielle Modell ergibt sich aus folgender Formel:

$$N = 4500 \cdot e^{0{,}0463\,t}$$

Dabei ist t die Zeit in Wochen seit Anfang 2014 mit $t = 0$ in Woche 1. N ist die Anzahl der Kunden.

In Woche 43 scheint der Unterschied zwischen der Anzahl der Kunden gemäß dem Modell und der tatsächlichen Anzahl der Kunden am größten zu sein.

1. **(3 Punkte) Berechnen Sie diese Differenz in Woche 43. Hierfür können Sie die Abbildung in der Beilage verwenden. Runden Sie Ihre Antwort auf Hunderte.**

Wie bereits erwähnt, hat sich die Anzahl der Kunden 2014 verzehnfacht. Das scheint tatsächlich genau ein Jahr gedauert zu haben.

2. **(3 Punkte) Berechnen Sie mithilfe der Formel die Anzahl der Wochen, im Laufe derer sich die Anzahl der Kunden verzehnfacht.**

Sie können die Geschwindigkeit, mit der die Anzahl der Kunden pro Woche zunimmt, näherungsweise bestimmen, indem Sie die Steigung des Diagramms zum entsprechenden Zeitpunkt bestimmen.

3. **(4 Punkte) Verwenden Sie das Diagramm, um die Wachstumsrate näherungsweise zu bestimmen, mit der die Anzahl der Kunden pro Woche in Woche 31 des Jahres 2014 wächst. Runden Sie Ihre Antwort auf Hunderter.**

Man kann die Formel $N = 4500\, e^{0{,}0463\, t}$ so umschreiben, dass berechnet wird, in welcher Woche eine bestimmte Anzahl von Kunden erreicht wird. Diese Beziehung hat die Form:

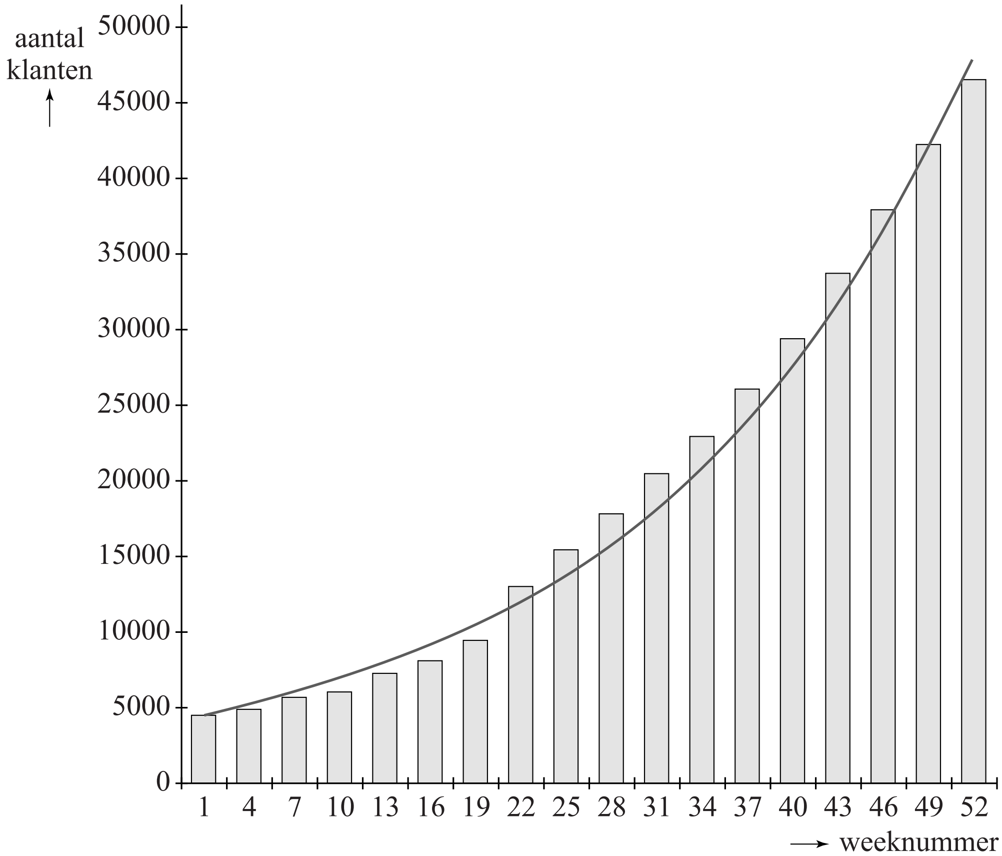
$$t = a \cdot \ln(b \cdot N)$$

4. **(3 Punkte) Berechnen Sie a und b. Runden Sie den Wert von a auf zwei Dezimalstellen und den Wert von b auf fünf Dezimalstellen.**

Knab

Knab is een tamelijk nieuwe bank, gestart in 2012 als onderdeel van Aegon. In het begin groeide Knab maar langzaam: eind 2013 had de bank nog maar 4500 klanten. Daarom besloot de bank in 2014 de zaken anders aan te pakken. Dit leverde direct resultaat op, want het aantal klanten is in 2014 tien keer zo groot geworden.
Zie de figuur. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



In de figuur zijn door middel van staven de aantallen klanten om de drie weken weergegeven. Bovendien is de grafiek getekend van een exponentieel model dat de werkelijke aantallen goed benadert.

Het exponentiële model wordt gegeven door de formule:

$$N = 4500 \cdot e^{0,0463 \cdot t}$$

Hierin is t de tijd in weken sinds het begin van 2014 met $t = 0$ in week 1 en N het aantal klanten.

In week 43 lijkt het verschil tussen het aantal klanten volgens het model en het werkelijke aantal klanten het grootst.

3p **1** Bereken dit verschil in week 43. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage. Rond je antwoord af op honderdtallen.

lees verder ►►►

Zoals gezegd is het aantal klanten in het jaar 2014 vertienvoudigd. Dat lijkt inderdaad precies een jaar geduurd te hebben.

3p **2** Bereken met behulp van de formule het gehele aantal weken dat in het model nodig is voor een vertienvoudiging.

De snelheid waarmee het aantal klanten per week groeit, kun je benaderen door de helling van de grafiek op het betreffende tijdstip te bepalen.

4p **3** Benader met behulp van de grafiek in de figuur op de uitwerkbijlage de snelheid waarmee het aantal klanten per week groeit in week 31 van 2014. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Je kunt de formule $N = 4500 \cdot e^{0,0463 \cdot t}$ zó herschrijven, dat bij een gegeven aantal klanten berekend wordt in welke week dat aantal bereikt wordt. Dat verband is van de vorm:

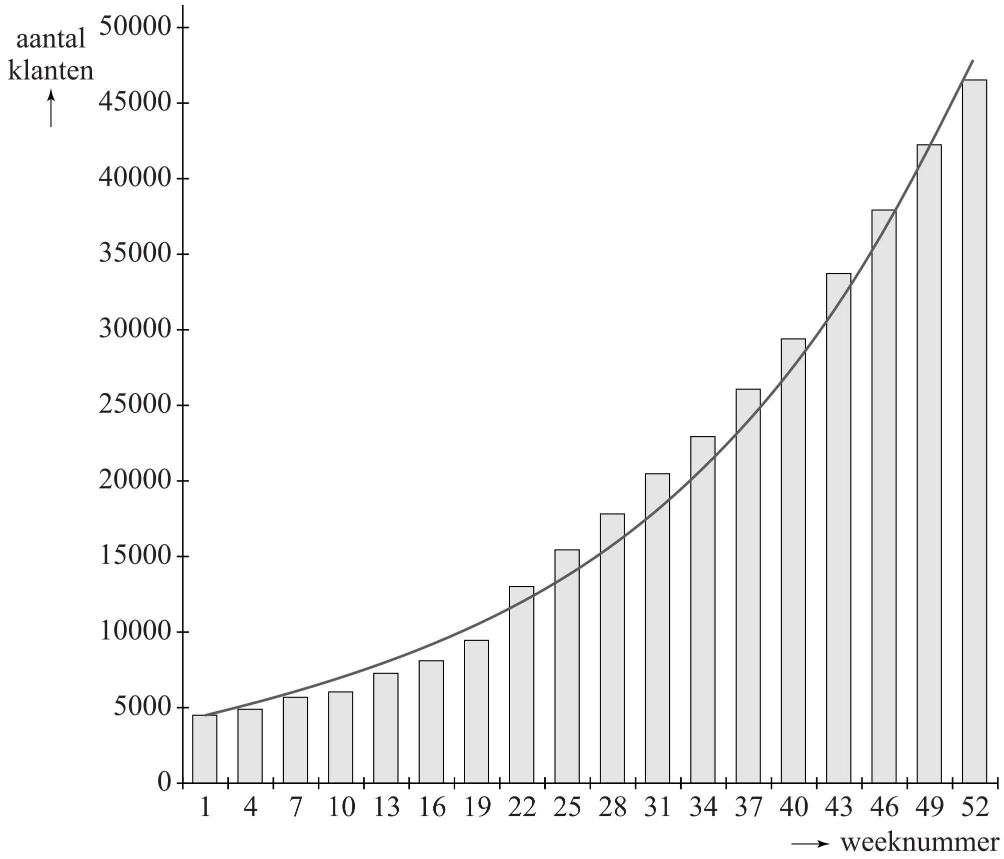
$$t = a \cdot \ln(b \cdot N)$$

3p **4** Bereken a en b. Rond de waarde van a af op twee decimalen en de waarde van b op vijf decimalen.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

1 en 3

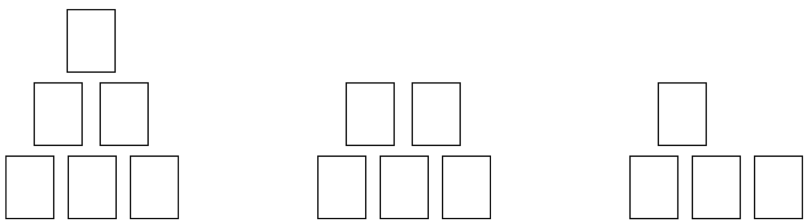


Dosenstapel (Lösungen)

Beim Spiel Dosenwerfen bekommt der Spieler einen oder mehrere Bälle, mit denen er versuchen muss, so viele Dosen wie möglich von einem Turm zu werfen. Ein solcher Turm wird immer auf die gleiche Weise gebaut: In der untersten Schicht befinden sich mehrere Dosen und auf den darüber liegenden Schichten immer jeweils eine weniger. Das Foto zeigt einen Turm mit sechs Dosen.

In dieser Aufgabe gehen wir davon aus, dass die unterste Schicht vollständig erhalten bleibt, wenn ein Ball auf den Turm trifft. Angenommen, eine berührte Dose fällt tatsächlich vom Turm und landet niemals „schön“ auf einer unteren Schicht. Die Dosen werden entfernt, wenn eine oder mehrere Dosen umgeworfen werden.

Lars wirft einen Ball auf einen Turm aus sechs Dosen, wie auf dem Foto sichtbar. Nach seinem Wurf bleibt die unterste Schicht mit den drei Dosen erhalten. Es gibt jetzt fünf Optionen für den verbleibenden Turm. Drei dieser Optionen sind in den Abbildungen unten schematisch dargestellt.



5. (2 Punkte) Zeichnen Sie die beiden anderen Möglichkeiten auf.

In dieser Aufgabe werden wir diese Situation theoretisch betrachten. Wir zählen die Anzahl der möglichen Stapel von Dosen mit n Dosen in der untersten Schicht. Ab der zweiten Schicht steht jede Dose immer auf zwei darunter liegenden Dosen. Wir gehen immer davon aus, dass einmal geworfen wurde und die gesamte untere Schicht erhalten geblieben ist.

Für $n = 1$ gibt es nur eine Dose, also gibt es auch einen möglichen Stapel. Es gibt zwei mögliche Stapel für $n = 2$. Siehe dazu die Abbildung unten.

Man kann eine Argumentation verwenden, um zu überprüfen, dass es 5 mögliche Stapel für $n = 3$ gibt. Diese Argumentation lautet wie folgt:

- Es gibt eine Möglichkeit mit 3 Dosen auf der unteren Schicht und 0 Dosen auf der zweiten Schicht.
- Es gibt zwei Möglichkeiten mit 3 Dosen auf der unteren Schicht und 1 Dose auf der zweiten Schicht.
- Es gibt eine Möglichkeit mit 3 Dosen in der untersten und 2 Dosen in der zweiten Schicht.
- Es gibt eine Möglichkeit mit 3 Dosen in der untersten Schicht, 2 Dosen in der zweiten Schicht und 1 Dose in der dritten Schicht.

Das sind insgesamt $1 + 2 + 1 + 1 = 5$ Möglichkeiten.

Für $n = 4$ ist die Anzahl der möglichen Stapel 14.

6. (4 Punkte) Zeigen Sie das.

Im 19. Jahrhundert entdeckte der belgische Mathematiker Charles CATALAN die folgende Formel:

$$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + C_2 \cdot C_{n-3} + \ldots + C_{n-2} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0 \text{ mit } C_0 = 1$$

Dabei ist C_n die Anzahl der möglichen Stapel mit n Dosen in der untersten Schicht.

7. (3 Punkte) Berechnen Sie C_5 mit obenstehender Formel.

Für diese Zahlenfolge, den sogenannten *Catalan-Zahlen*, gibt es keine direkte Formel. Es gibt jedoch eine Formel, mit der man sich für große Werte von n den Catalan-Zahlen annähern kann. Diese Formel lautet $B_n = 0{,}564 \cdot e^{1{,}386\,n} \cdot n^{-1{,}5}$, wobei B_n eine Näherung der n-ten Catalan-Zahl (C_n) ist.

Die Werte von B_n steigen schnell an. Wie schnell sie ansteigen, kann mit der Ableitung von B_n berechnet werden. Es gilt (näherungsweise) Folgendes:

$$B_n{}' = 0{,}782 \cdot e^{1{,}386\,n} \cdot n^{-1{,}5} - 0{,}846 \cdot e^{1{,}386\,n} \cdot n^{-2{,}5}$$

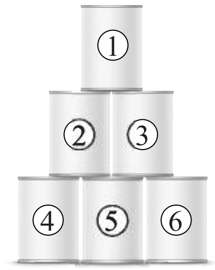
8. (4 Punkte) Beweisen Sie das.

Ab einer bestimmten Anzahl von Dosen erhöht sich die Anzahl möglicher Stapel um mehr als 500 000, wenn die unterste Schicht um eine Dose erweitert wird.

9. (3 Punkte) Untersuchen Sie mithilfe der Ableitung von B_n, ab welcher Anzahl von Dosen in der untersten Schicht dies der Fall ist.

Blikstapelingen

foto

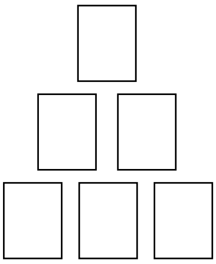


Bij het spel blikgooien krijgt de speler één of meer ballen waarmee hij of zij moet proberen zoveel mogelijk blikken van een toren af te gooien. Zo'n toren is altijd op dezelfde manier opgebouwd: op de onderste laag staat een aantal blikken en op de lagen erboven steeds één minder. Op de foto zie je een toren met zes blikken.

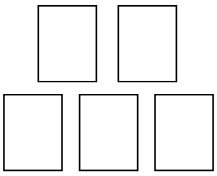
We nemen in deze opgave aan dat, als een bal de toren raakt, de onderste laag in zijn geheel blijft staan. Neem aan dat een geraakt blik ook werkelijk van de toren afvalt en nooit "mooi" op een lager gelegen laag terechtkomt en ook dat blikken niet blijven staan als één of meer blikken eronder wegvallen.

Lars gooit één bal naar een toren met zes blikken, zoals op de foto. Na zijn worp blijft de onderste laag van drie blikken staan. Er zijn nu vijf mogelijkheden voor de overgebleven toren. Drie van deze mogelijkheden zijn in figuur 1a, 1b en 1c schematisch getekend.

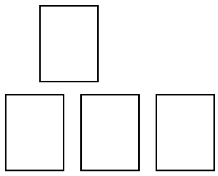
figuur 1a



figuur 1b



figuur 1c



2p **5** Teken de andere twee mogelijkheden.

We gaan in deze opgave deze situatie wat theoretischer bekijken. We tellen het aantal mogelijke stapelingen van blikken op een onderste laag van n blikken. Hierbij staat vanaf de tweede laag ieder blik steeds boven op twee onderliggende blikken. We nemen steeds aan dat er één keer gegooid is en dat de hele onderste laag is blijven staan.

Voor $n = 1$ is er maar één blik, dus is er ook één mogelijke stapeling.
Voor $n = 2$ zijn er twee mogelijke stapelingen. Zie figuur 2.

lees verder ►►►

figuur 2

Je kunt nu met een redenering nagaan dat het aantal mogelijke stapelingen voor $n = 3$ gelijk is aan 5. Deze redenering gaat als volgt:

- Er is één manier met 3 blikken op de onderste laag en 0 blikken op de tweede laag.
- Er zijn twee manieren met 3 blikken op de onderste laag en 1 blik op de tweede laag.
- Er is één manier met 3 blikken op de onderste laag en 2 blikken op de tweede laag (figuur 1b).
- Er is één manier met 3 blikken op de onderste laag, 2 blikken op de tweede laag en 1 blik op de derde laag (figuur 1a).

Dat is samen 1 + 2 + 1 + 1 = 5 mogelijkheden.

Voor $n = 4$ is het aantal mogelijke stapelingen gelijk aan 14.

4p **6** Toon dit aan.

De Belgische wiskundige Charles Catalan ontdekte in de 19e eeuw de volgende formule:

$$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + C_2 \cdot C_{n-3} + ... + C_{n-2} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0 \text{ met } C_0 = 1$$

Hierin is C_n het aantal mogelijke stapelingen met n blikken op de onderste laag.

3p **7** Bereken met behulp van bovenstaande formule C_5 .

Voor deze rij getallen, de zogenaamde Catalan-getallen, bestaat geen directe formule. Wel bestaat er een formule die voor grote waarden van n de Catalan-getallen benadert. Deze formule is $B_n = 0,564 \cdot \mathrm{e}^{1,386 \cdot n} \cdot n^{-1,5}$, waarbij B_n een benadering is van het n^e Catalan-getal (C_n).

De getallen voor B_n worden snel groter. Hoe snel dit gaat, is te berekenen met behulp van de afgeleide van B_n. Er geldt (bij benadering):

$$B_n' = 0,782 \cdot \mathrm{e}^{1,386 \cdot n} \cdot n^{-1,5} - 0,846 \cdot \mathrm{e}^{1,386 \cdot n} \cdot n^{-2,5}$$

4p **8** Toon dit aan.

Vanaf een bepaald aantal blikken zal het aantal mogelijke stapelingen met meer dan 500 000 toenemen als de onderste laag met één blik toeneemt.

3p **9** Onderzoek met behulp van de afgeleide van B_n vanaf welk aantal blikken op de onderste laag dit is.

Karten mischen (Lösungen)

Nach dem Mischen beginnt ein Kartenspiel normalerweise mit einer gleichmäßigen Verteilung der Karten auf mehrere Spieler. Angenommen, in einem bestimmten Spiel werden 16 verschiedene Karten gleichmäßig auf vier Spieler A, B, C und D aufgeteilt. Die Spieler A, B, C und D erhalten also jeweils vier Karten.

Wir betrachten einen Kartenstapel, der aus 16 verschiedenen Karten besteht. Diese Karten können in ungefähr $2{,}1 \cdot 10^{13}$ verschiedenen Reihenfolgen sein.

Die Anzahl der möglichen Reihenfolgen, in denen die Karten liegen können, ist viel größer als die Anzahl der Möglichkeiten, die Karten auf die vier Spieler A, B, C und D aufzuteilen.

10. (4 Punkte) Berechnen Sie, wie viel Mal so groß diese Zahl ist. Runden Sie auf Zehntausender.

1992 veröffentlichten die amerikanischen Mathematiker BAYER und DIACONIS einen Artikel über das Mischen von Karten. Für diesen Artikel hatten sie die häufigste Mischmethode untersucht, den sogenannten **Riffle Shuffle** (siehe Foto).

Sie kamen zu dem Schluss, dass es mit dieser Mischtechnik nicht möglich ist, einen Kartenstapel wirklich zufällig zu machen, wie es beispielsweise ein Computer kann. Für ein Kartenspiel ist eine Mischmethode gut genug, wenn die Karten „ausreichend zufällig“ gemischt werden.

Bayer und Diaconis entdeckten in ihrer Studie, dass die Mindestanzahl an Kartenvertauschungen, die gemacht werden muss, sodass die Mischmethode als „ausreichend zufällig“ bezeichnet werden kann, durch die folgende Formel angenähert werden kann:

$$A = 1{,}5 \cdot \log_2(n)$$

In dieser Formel gibt A an, wie oft ein Kartenspiel mit n Karten mindestens gemischt werden muss, um als „ausreichend zufällig“ gekennzeichnet zu werden. A wird auf eine ganze Zahl aufgerundet.

Der Kartenspiel **Joker** wird mit zwei Sätzen zu je 52 Spielkarten gespielt, ergänzt durch insgesamt 4 sogenannte Joker.

11. (2 Punkte) Berechnen Sie gemäß der Formel von Bayer und Diaconis, wie oft die Karten gemischt werden müssen, wenn Sie Joker spielen.

Wenn die Anzahl der zu mischenden Karten zunimmt, nimmt auch die Anzahl, wie oft die Karten mindestens gemischt werden müssen, zu. Diese Zahl nimmt jedoch immer langsamer zu. Man kann das an der Ableitung $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n}$ erkennen.

12. (4 Punkte) Stellen Sie die Formel der Ableitung $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n}$ auf und begründen Sie mit dieser Formel ohne Zahlen einzusetzen oder eine Skizze anzufertigen, dass A immer weniger stark ansteigt.

In den meisten Casinos kann man das Spiel **Blackjack** spielen. Dies wird in der Regel mit vier Kartendecks gespielt (insgesamt 208 Karten). Die Anzahl, wie oft eine so große Zahl von Karten gemischt werden muss, ist gar nicht so hoch: Nach der Formel von Bayer und Diaconis nur 12 Mal. Das sind nur drei Shuffles mehr als bei einem Deck.

Nach der Formel von Bayer und Diaconis gilt im Allgemeinen: Wenn sich die Anzahl der Karten auf das Vierfache erhöht, müssen sie um drei Mal öfter gemischt werden.

13. (4 Punkte) Zeigen Sie dies anhand der Formel für A und den Berechnungsregeln für Logarithmen ohne Verwendung von Zahlenbeispielen.

Kaarten schudden

Na het schudden begint een kaartspel meestal met het gelijk verdelen van de kaarten onder een aantal spelers. Neem aan dat bij een bepaald spel 16 verschillende kaarten gelijk verdeeld worden onder vier spelers A, B, C en D. Spelers A, B, C en D krijgen ieder dus vier kaarten.

We bekijken een stapel kaarten bestaand uit 16 verschillende kaarten. Deze kaarten kunnen op circa $2{,}1 \cdot 10^{13}$ verschillende volgordes liggen.

Het aantal volgordes waarin de kaarten kunnen liggen, is veel groter dan het aantal mogelijkheden om de kaarten onder de vier spelers A, B, C en D te verdelen.

4p **10** Bereken hoeveel keer zo groot dit aantal is. Rond af op tienduizendtallen.

In 1992 publiceerden de Amerikaanse wiskundigen Bayer en Diaconis een artikel over het schudden van kaarten. Voor dit artikel hadden zij de meest gebruikte manier van schudden onderzocht, de zogeheten **Riffle Shuffle** (zie de foto).

foto

Zij kwamen tot de conclusie dat het met deze schudtechniek niet mogelijk is een stapel kaarten écht willekeurig te maken, zoals bijvoorbeeld een computer dat wel kan.
Voor het spelen van een kaartspel is het goed genoeg als de kaarten “voldoende willekeurig” geschud zijn.

Bayer en Diaconis ontdekten tijdens hun onderzoek dat het aantal keren dat een stapel kaarten minstens geschud moet worden om als “voldoende willekeurig” bestempeld te worden, kan worden benaderd met de formule:

$$A = 1{,}5 \cdot {}^{2}\log(n)$$

In deze formule is A het aantal keren dat een stapel van n kaarten minstens geschud moet worden om als “voldoende willekeurig” bestempeld te worden. A wordt naar boven afgerond op een geheel getal.

lees verder ►►►

Het kaartspel **jokeren** wordt gespeeld met twee sets van 52 speelkaarten, aangevuld met in totaal 4 zogeheten **jokers**.

2p **11** Bereken hoe vaak de kaarten bij jokeren minstens geschud moeten worden volgens de formule van Bayer en Diaconis.

Als het aantal te schudden kaarten toeneemt, neemt ook het aantal keren dat er minstens geschud moet worden toe. Dit aantal neemt echter steeds langzamer toe. Je kunt dit zien aan de afgeleide $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n}$.

4p **12** Stel de formule op van de afgeleide $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n}$ en beredeneer aan de hand van deze formule, dus zonder getallen in te vullen of een schets te maken, dat A afnemend stijgend is.

In de meeste casino's kun je het spel **blackjack** spelen. Dat wordt over het algemeen gespeeld met vier spellen kaarten (totaal 208 kaarten). Het aantal keer dat zo'n groot aantal kaarten minstens geschud moet worden is helemaal niet zo groot: volgens de formule van Bayer en Diaconis slechts 12 keer. Dat is maar drie keer schudden meer dan bij één spel kaarten.

Volgens de formule van Bayer en Diaconis geldt in het algemeen: als het aantal kaarten vier keer zo groot wordt, hoeft er maar drie keer extra geschud te worden.

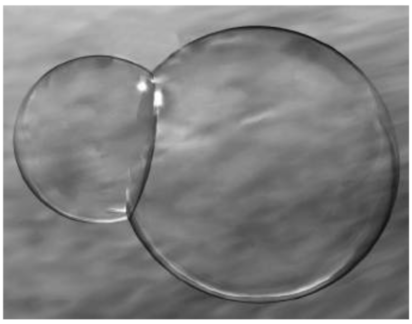
4p **13** Toon dit aan met behulp van de formule voor A en de rekenregels voor logaritmen zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden.

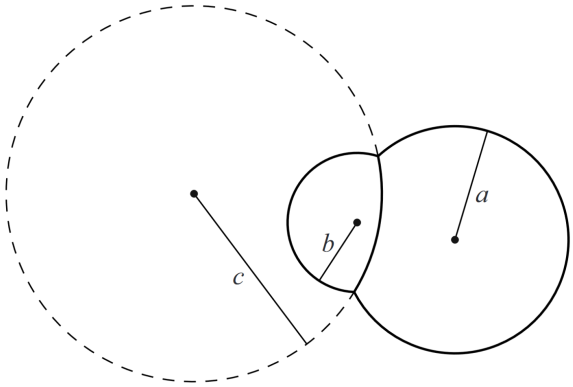
Seifenblasen (Lösungen)

Auf dem Foto sehen Sie eine Doppelblase: zwei kugelförmige Seifenblasen, die aneinander haften. Beide Seifenblasen sind Teil einer Kugel. Die Trennmembran zwischen diesen Seifenblasen ist ebenfalls Teil einer Kugel. Es wurde festgestellt, dass die folgende Formel für jede Doppelblase gilt:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

In dieser Formel ist a der Radius der größten Blase, b der Radius der kleinsten Blase und c der Radius des kugelförmigen Trennwand. Dies ist in der Abbildung schematisch dargestellt.





Die Doppelblase auf dem Foto besteht aus einer Blase mit einem Radius von 2,5 cm und einer Blase mit einem Radius von 4 cm.

14. (3 Punkte) Berechnen Sie mithilfe der obigen Formel den Radius der Trennwand. Runden Sie Ihr Ergebnis auf ganze Millimeter.

Nehmen wir nun an, dass die größte Blase einen festen Radius von 3 cm hat (also $a = 3$). Wir fragen uns, was passiert, wenn der Radius der kleinsten Blase immer kleiner wird: Wird die Trennwand flacher oder gewölbter? Mit anderen Worten, wird c größer oder kleiner?

15. (4 Punkte) Überlegen Sie anhand der obigen Formel, ob c mit abnehmendem Radius der kleinsten Blase zunimmt oder abnimmt.

Wenn die Radien a und b bekannt sind, kann c schnell und direkt berechnet werden, indem man die Formel $c = \frac{a\,b}{a-b}$ aus der Gleichung $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ herleitet.

16. (3 Punkte) Führen Sie diese Herleitung durch.

Die Antwort auf die Frage, ob die Trennwand flacher oder gewölbter wird, wenn die kleinste Seifenblase immer kleiner wird, kann mit der Ableitung von c gefunden werden.

Wieder nehmen wir für die größere Seifenblase einen festen Radius von 3 cm an. Die Formel $c = \frac{a\,b}{a-b}$ wird dann zu $c = \frac{3\,b}{3-b}$ mit $0 < b < 3$.

17. (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}b}$ von $c = \frac{3\,b}{3-b}$ auf und argumentieren Sie anhand dieser Ableitung, ob c größer oder kleiner wird, wenn der Radius der kleineren Seifenblase kleiner wird.

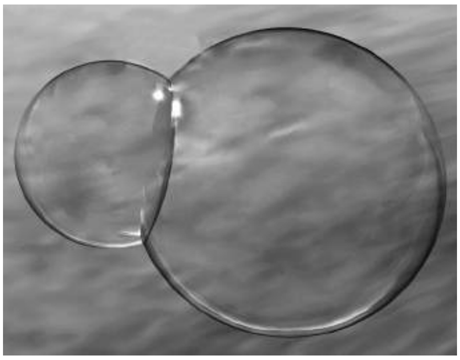
Zeepbellen

Op de foto zie je een **dubbele zeepbel**: twee bolvormige zeepbellen die aan elkaar vastzitten. Beide zeepbellen zijn een deel van een bol. Het scheidingsvlies tussen deze zeepbellen is ook een deel van een bol. Men heeft ontdekt dat voor elke dubbele zeepbel de volgende formule geldt:

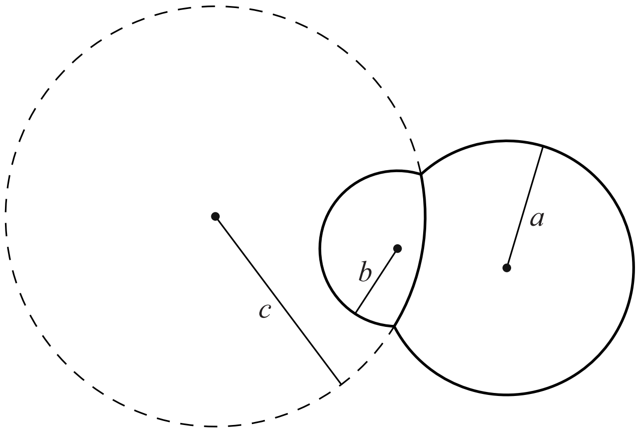
$$\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

In deze formule is a de straal van de grootste zeepbel, b de straal van de kleinste zeepbel en c de straal van het bolvormige scheidingsvlies. In de figuur is dit schematisch weergegeven.

foto



figuur



De dubbele zeepbel op de foto bestaat uit een zeepbel met een straal van 2,5 cm en een zeepbel met een straal van 4 cm.

3p **14** Bereken met behulp van bovenstaande formule de straal van het scheidingsvlies. Rond je antwoord af op hele millimeters.

Neem nu aan dat de grootste zeepbel een vaste straal heeft van 3 cm (dus $a = 3$). We vragen ons af wat er gebeurt als de straal van de kleinste zeepbel steeds kleiner wordt: wordt het scheidingsvlies dan steeds platter of steeds boller? Met andere woorden: neemt c toe of af?

4p **15** Beredeneer aan de hand van bovenstaande formule of c toeneemt of afneemt als de straal van de kleinste zeepbel steeds kleiner wordt.

lees verder ►►►

Als de stralen a en b bekend zijn, kun je c snel en rechtstreeks berekenen door de formule $\frac{1}{c}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$ te herleiden tot $c=\frac{ab}{a-b}$.

3p **16** Geef deze herleiding.

Het antwoord op de vraag of het scheidingsvlies steeds platter of boller wordt als de kleinste zeepbel steeds kleiner wordt, kunnen we ook vinden met behulp van de afgeleide van c.

We nemen opnieuw een grootste zeepbel met een vaste straal van 3 cm. De formule $c=\frac{ab}{a-b}$ wordt dan $c=\frac{3b}{3-b}$ met $0<b<3$.

5p **17** Stel de afgeleide $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}b}$ van $c=\frac{3b}{3-b}$ op en beredeneer aan de hand van de formule van deze afgeleide of c toeneemt of afneemt als de straal van de kleinste zeepbel kleiner wordt.

Schildkröten (Lösungen)

Manche Menschen haben eine Schildkröte als Haustier. Bestimmte Arten überwintern unter natürlichen Bedingungen. Der Besitzer kann seine Schildkröte in den Winterschlaf versetzen, andernfalls muss er seinem Haustier den ganzen Winter über zusätzliches Licht und Wärme geben. Eine Schildkröte muss zu Beginn ihres Winterschlafes ein gesundes Gewicht haben, sonst besteht die Möglichkeit, dass sie nicht überlebt. Das **Jackson-Verhältnis** wird häufig verwendet, um festzustellen, ob die Schildkröte ein gesundes Gewicht hat.

Das Jackson-Verhältnis R wird mit folgender Formel berechnet:

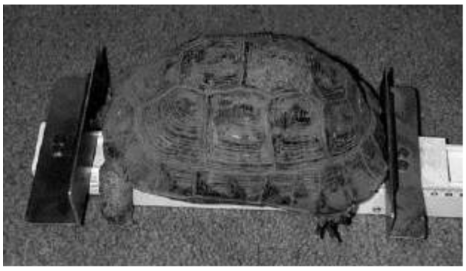
$$R = \frac{G}{L^3}$$

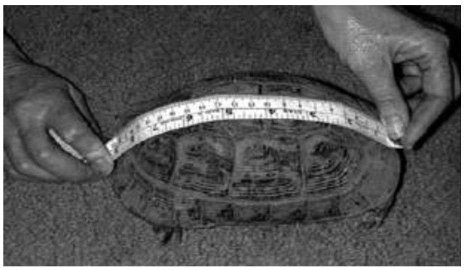
Dabei ist G das Gewicht der Schildkröte in g und L die Länge des Schildkrötenpanzers in cm.
Für die griechische Schildkröte gilt folgende Faustregel: Eine Schildkröte kann sicher überwintern, wenn ihr Jackson-Verhältnis zwischen 0,18 und 0,22 liegt.

Jesse hat eine griechische Schildkröte mit einer Schildlänge von 15 cm und möchte sie überwintern lassen.

18. (3 Punkte) Berechnen Sie auf ganze Gramm genau, zwischen welchen Werten ihr Gewicht nach der Faustregel liegen kann.

Die Länge des Schildes muss gerade gemessen werden, indem beispielsweise die Schildkröte mit dem zurückgezogenen Kopf zwischen einen Bremssattel gelegt wird (siehe linkes Foto). Angenommen, jemand misst trotzdem die Länge über dem Schild (siehe rechtes Foto).





19. (3 Punkte) Argumentieren Sie, ob eine Schildkröte ein größeres oder kleineres Jackson-Verhältnis als das tatsächliche erhält, wenn Sie auf diese Weise messen.

Auf einer englischen Website heißt es: Wenn Sie das Gewicht in Englischen Pfund (lbs) und die Schildlänge in Zoll messen, kann das Jackson-Verhältnis anhand folgender Formel berechnet werden:

$$R = c \cdot \frac{W}{l^3}$$

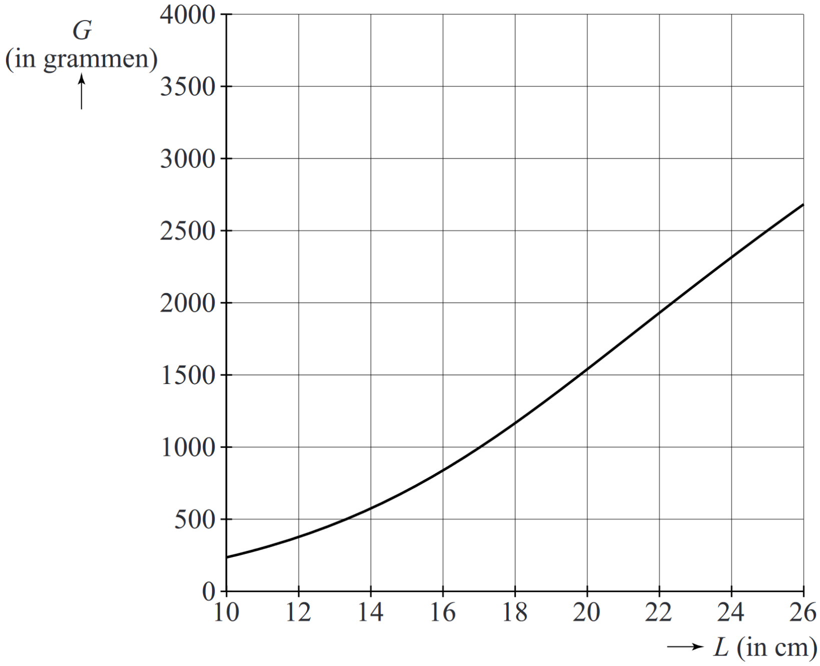
Dabei ist W das Gewicht in Englischen Pfund und l die Schildlänge in Zoll.

1 Englisches Pfund (lb) $\approx$ 454 g und 1 Zoll = 2,54 cm

Das Jackson-Verhältnis muss daher auch den gleichen Wert ergeben.

20. (3 Punkte) Berechnen Sie den Wert von *c* in dieser Formel. Geben Sie das Ergebnis auf eine Dezimalstelle gerundet an.

Eine andere Möglichkeit, um festzustellen, ob eine griechische Schildkröte sicher überwintern kann, ist die Verwendung der Grafik in der folgenden Abbildung. Die Grafik zeigt das Gewicht gesunder Schildkröten als Funktion der Schildlänge. Befindet sich eine Schildkröte mit ihrer Größe und ihrem Gewicht in der Nähe dieser Werte, kann sie sicher in den Winterschlaf versetzt werden.



Wir fragen uns, ob sich der Graph der Figur der oben genannten Faustregel annähert. Um dies zu untersuchen, können wir in der Abbildung Linien der oberen und unteren Grenzen zeichnen, die der oben genannten Faustregel zugeordnet sind, und dann den Bereich angeben, der dieser Faustregel im Koordinatensystem zugeordnet ist. Das Koordinatensystem befindet sich auch in der Beilage.

21. (6 Punkte) Geben Sie im Koordinatensystem in der Beilage den Bereich an, in dem sich eine Schildkröte gemäß der Faustregel mit ihrer Schildlänge und ihrem Gewicht befinden muss, um einen sicheren Winterschlaf zu beginnen.

Schildpadden

Sommige mensen hebben een schildpad als huisdier. Bepaalde soorten houden onder natuurlijke omstandigheden een winterslaap. De eigenaar kan ervoor kiezen om zijn schildpad ook in winterslaap te laten gaan, omdat hij anders de hele winter extra licht en warmte moet geven aan zijn huisdier. Een schildpad moet een gezond gewicht hebben bij het begin van zijn winterslaap, anders is er een kans dat hij het niet overleeft. Om vast te stellen of de schildpad een gezond gewicht heeft, wordt vaak de **Jackson Ratio** gebruikt.

De Jackson Ratio R wordt berekend met de formule $R = \dfrac{G}{L^3}$.

Hierin is G het gewicht van de schildpad in gram en L de lengte van het schild van de schildpad in cm.
Voor de Griekse landschildpad geldt de volgende vuistregel: een schildpad kan veilig aan een winterslaap beginnen als zijn Jackson Ratio tussen 0,18 en 0,22 ligt.

Jesse heeft een Griekse landschildpad met een schildlengte van 15 cm en wil hem een winterslaap laten houden.

3p **18** Bereken in hele grammen nauwkeurig tussen welke waarden zijn gewicht dan mag liggen volgens de vuistregel.

De lengte van het schild moet recht gemeten worden, bijvoorbeeld door de schildpad met ingetrokken kop tussen een schuifmaat te zetten (zie foto 1). Veronderstel dat iemand toch de lengte over het schild heen meet (zie foto 2).

foto 1

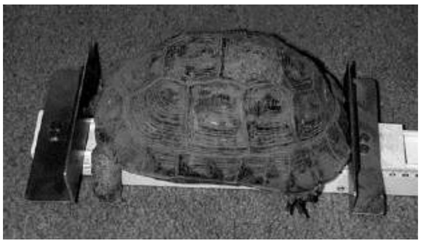
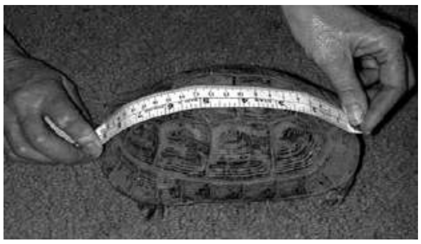


foto 2



3p **19** Beredeneer of een schildpad door op die manier te meten een grotere of een kleinere Jackson Ratio krijgt dan hij in werkelijkheid heeft.

lees verder ►►►

Op een Engelse website staat het volgende: als je het gewicht meet in Engelse ponden (lbs) en de schildlengte in inches, kun je de Jackson Ratio berekenen met de formule $R = c \cdot \dfrac{W}{l^3}$.

Hierin is W het gewicht in Engelse ponden en l de schildlengte in inches.

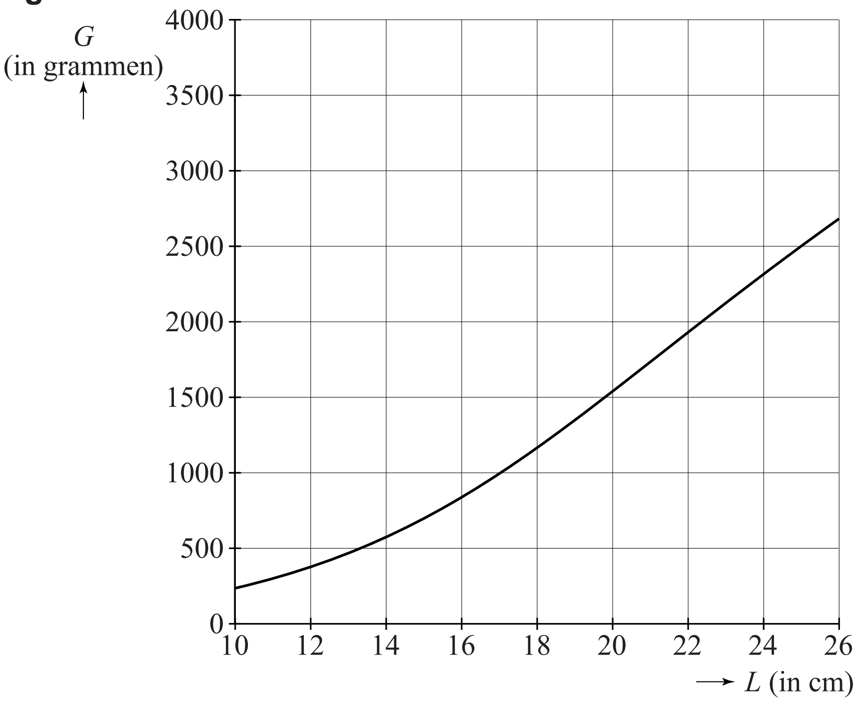
1 Engels pond (lb) ≈ 454 gram en 1 inch $= 2{,}54$ cm.

De Jackson Ratio moet dan ook weer dezelfde waarde opleveren.

3p **20** Bereken de waarde van c in deze formule. Rond je antwoord af op één decimaal.

Een andere manier om te bepalen of een Griekse landschildpad veilig aan een winterslaap kan beginnen, is met behulp van de grafiek in onderstaande figuur. De grafiek geeft het gewicht van gezonde schildpadden als functie van de schildlengte. Als een schildpad met zijn lengte en gewicht in de buurt van deze grafiek zit, is het veilig om hem in winterslaap te laten gaan.

figuur



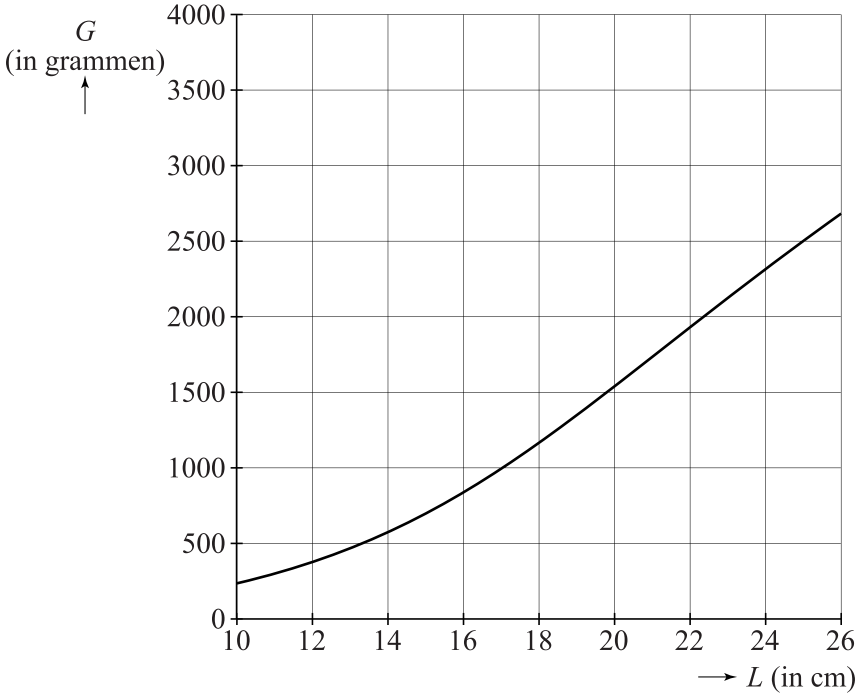
We vragen ons af of de grafiek van de figuur bij benadering overeenstemt met de eerder genoemde vuistregel. Om dit te onderzoeken kunnen we in de figuur de grafieken tekenen van de onder- en de bovengrens die horen bij de eerder genoemde vuistregel en vervolgens het gebied dat hoort bij die vuistregel in de figuur aangeven. De figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

6p **21** Geef in de figuur op de uitwerkbijlage het gebied aan waarin een schildpad zich volgens de vuistregel met zijn schildlengte en gewicht moet bevinden om veilig aan een winterslaap te kunnen beginnen.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer _____________

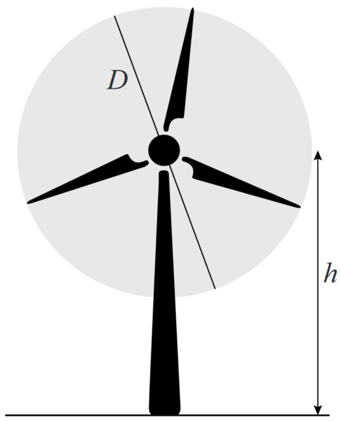
21



Größere Windmühlen (Lösungen)

Windenergie wird mithilfe von Windmühlen in Strom umgewandelt. In den letzten Jahrzehnten wurden immer größere Windmühlen installiert, denn je größer eine Windmühle ist, desto mehr Strom wird durch sie gewonnen. In dieser Aufgabe betrachten wir den zunehmenden Ertrag von Windmühlen mit zunehmender Größe.

In der Abbildung sehen Sie eine schematische Darstellung einer Windmühle mit der Masthöhe h und dem „Rotordurchmesser“ D. Die maximale Strommenge, die mit einer Windmühle erzeugt werden kann, wird als **Leistung** der Windmühle bezeichnet. Diese Leistung P wird in MW (Megawatt) ausgedrückt. Die Leistung einer Windmühle hängt unter anderem von der Masthöhe ab. Da in höheren Lagen mehr Wind weht und der Wind dort konstanter ist, erhöht sich die Leistung für jeden Meter zusätzlicher Masthöhe um einen bestimmten Prozentsatz. Es gilt: Bei gleichem Rotordurchmesser erhöht sich die Leistung mit jedem Meter zusätzlicher Masthöhe um 0,68 %.



Neben der Masthöhe hängt die Leistung einer Windmühle auch vom Rotordurchmesser ab. Diese beiden Faktoren spielen gleichzeitig eine Rolle. Dies spiegelt sich in der Formel für die Leistung wider:

$$P = 2{,}21 \cdot 10^{-4} \cdot g^{h} \cdot D^{2}$$

Dabei ist P die Leistung in MW, g der Wachstumsfaktor pro zusätzlichem Meter Masthöhe, h die Masthöhe in Meter und D der Rotordurchmesser in Meter. Ein Windpark enthält 40 Windmühlen mit einer Leistung von jeweils 0,75 MW. Die Mühlen haben einen Rotordurchmesser von 50 Metern und eine Masthöhe von 45 Metern. Die Windmühlen in diesem Park müssen ersetzt werden. Diese Windmühlen sollen durch zehn gleiche Windmühlen eines größeren Typs ersetzt werden. Als Faustregel gilt, dass eine Windmühle dieses Typs 25 000 € pro Meter Masthöhe kostet. Bei den aktuellen Windmühlen ist das Verhältnis zwischen Masthöhe und Rotordurchmesser $\frac{45}{50} = 0{,}9$.

Dieses Verhältnis gilt auch für den größeren Windmühlentyp. Für diesen Typ gilt daher: $h = 0{,}9\,D$.

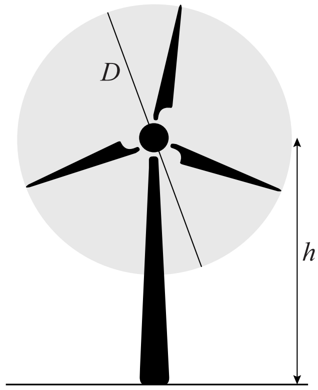
Die Gesamtleistung des Parks muss bei den neuen Windmühlen mindestens so groß sein wie bei den aktuellen Windmühlen.

22. (7 Punkte) Berechnen Sie die Mindestkosten, die für den Bau der neuen Windmühlen aufgewendet werden müssen. Runden Sie das Ergebnis auf Millionen Euro.

Grotere windmolens

Met behulp van windmolens wordt windenergie omgezet in elektriciteit. De afgelopen tientallen jaren zijn steeds grotere windmolens geplaatst, want hoe groter een windmolen, hoe groter de elektriciteitproductie door die windmolen. In deze opgave kijken we naar de toenemende opbrengst van windmolens bij toenemende grootte.

figuur



In de figuur zie je een schematische tekening van een windmolen met hierin aangegeven de ashoogte h en de 'rotordiameter' D.
De maximale hoeveelheid elektriciteit die men met een windmolen kan produceren, noemt men het **vermogen** van de windmolen. Dit vermogen P wordt uitgedrukt in MW (megawatt).
Het vermogen van een windmolen hangt onder andere af van de ashoogte. Doordat er op grotere hoogte meer wind is en doordat de wind daar constanter is, neemt het vermogen voor elke meter extra ashoogte met een bepaald percentage toe.
Er geldt: bij gelijkblijvende rotordiameter neemt voor elke meter extra ashoogte het vermogen met 0,68% toe.

Het vermogen van een windmolen hangt naast de ashoogte ook af van de rotordiameter. Deze twee factoren spelen tegelijkertijd een rol. Dat komt tot uiting in de formule voor het vermogen:

$$P = 2{,}21 \cdot 10^{-4} \cdot g^{h} \cdot D^{2}$$

Hierin is P het vermogen in MW, g de groeifactor per extra meter ashoogte, h de ashoogte in meter en D de rotordiameter in meter.

In een windmolenpark staan 40 windmolens met elk een vermogen van 0,75 MW. De molens hebben een rotordiameter van 50 meter en een ashoogte van 45 meter. De windmolens in dit park zijn aan vervanging toe. Men wil deze windmolens vervangen door tien gelijke windmolens van een groter type. Men hanteert als vuistregel dat een windmolen van dit type € 25 000,- per meter ashoogte kost. Bij de huidige windmolens is de verhouding tussen ashoogte en rotordiameter gelijk aan $\frac{45}{50} = 0{,}9$.

Deze verhouding zal ook gelden voor het grotere type windmolen, dus voor dit type geldt: $h = 0{,}9D$.

Het totale vermogen van het park moet met de nieuwe windmolens minstens even groot worden als het met de huidige windmolens is.

7p **22** Bereken de minimale investering die gedaan zal moeten worden voor de bouw van de nieuwe windmolens. Rond je antwoord af op miljoenen euro's.