Zentral gestellte niederländische Reifeprüfung Mathematik; https://wiskunde-examens.nl

Wir stellen hier eine Übersetzung der Aufgabenstellungen der niederländischen Reifeprüfung Mathematik (vwo wiskunde B 2018) zur Verfügung. Die Übersetzung wurde vom *Mathematik macht Freu(n)de*-Team mit Unterstützung von *Google Translate* angefertigt. Die Originaldatei ist jeweils nach dem entsprechenden übersetzten Aufgabenblock eingebunden. Bilder und Grafiken wurden aus der Originaldatei in die Übersetzung direkt übernommen. Irrtümer vorbehalten.

vwo wiskunde B – 2. Termin 2018

Senkrecht an der Sprungstelle (Lösungen)

Die Funktion f ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{-2 + 2\sqrt{x+1}}{x}.$$

Ebenso gegeben ist die Funktion h durch

$$h(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{x+1}}.$$

Für $x \neq 0$ gilt: $f(x) = h(x)$.

1. (3 Punkte) Beweisen Sie, dass für $x \neq 0$ gilt: $f(x) = h(x)$.

Weiterhin ist die Funktion g gegeben durch

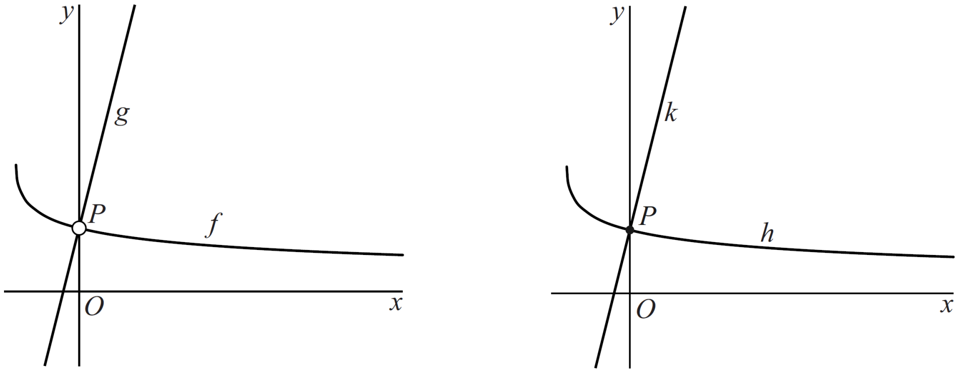
$$g(x) = \frac{4x^2 + x}{x}.$$

Es gibt eine Gerade k, die für $x \neq 0$ mit dem Graphen von g übereinstimmt.

Die Graphen von f und g sind in der Abbildung links unten dargestellt.

Der Punkt $P\,(0,1)$ ist eine hebbare Unstetigkeit beider Graphen.

Die Abbildung rechts unten zeigt den Graphen von h und die Gerade k sowie ihren Schnittpunkt P.



Es gilt:

- Die Graphen von f und g sind am Punkt P senkrecht zueinander.
- Der Graph von h und die Linie k stehen an ihrem Schnittpunkt P senkrecht zueinander.

2. (5 Punkte) Beweisen Sie, dass die Graphen von f und g im Punkt P senkrecht zueinander stehen.

Loodrecht in de perforatie

De functie f is gegeven door $f(x) = \dfrac{-2 + 2\sqrt{x+1}}{x}$.

Ook is gegeven de functie h door $h(x) = \dfrac{2}{1 + \sqrt{x+1}}$.

Voor $x \neq 0$ geldt: $f(x) = h(x)$

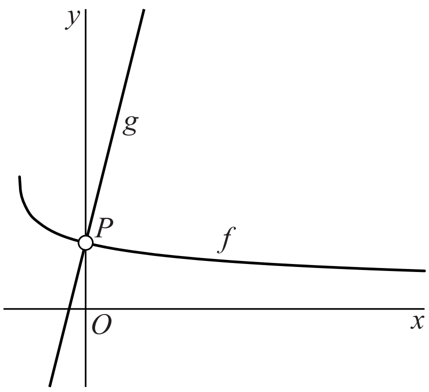
3p **1** Bewijs dat voor $x \neq 0$ geldt: $f(x) = h(x)$

Verder is de functie g gegeven door $g(x) = \dfrac{4x^2 + x}{x}$.

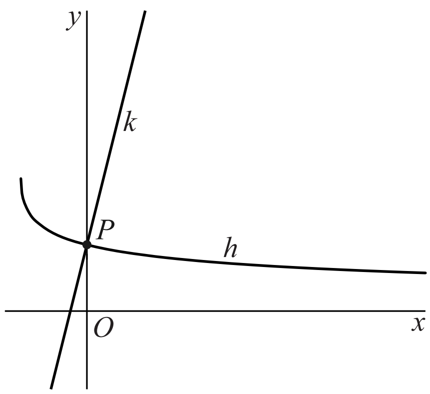
Er is een lijn k die voor $x \neq 0$ samenvalt met de grafiek van g.

In figuur 1 zijn de grafieken van f en g weergegeven.
Punt $P(0, 1)$ is de perforatie van beide grafieken.
In figuur 2 zijn de grafiek van h en lijn k weergegeven en ook hun snijpunt P.

figuur 1



figuur 2



Er geldt:

de grafieken van f en g staan in hun perforatie P loodrecht op elkaar als de grafiek van h en lijn k in hun snijpunt P loodrecht op elkaar staan.

5p **2** Bewijs dat de grafieken van f en g in hun perforatie P loodrecht op elkaar staan.

Eisball (Lösungen)

Die Geschwindigkeit, mit der ein Eiswürfel schmilzt, hängt unter anderem vom Verhältnis zwischen seiner Oberfläche A in cm^2 und seinem Volumen V in cm^3. Dieses Verhältnis wird durch den Quotienten $\frac{A}{V}$ ausgedrückt.

Beispiel: Bei einem kubischen Eiswürfel mit einer Kantenlänge von 3 cm ist dieser Quotient $\frac{54}{27} = 2$.

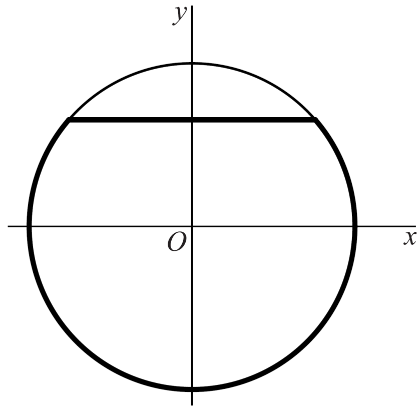
Es gibt auch kugelförmige Eiswürfel oder **Eisbällchen**. Siehe dazu das Bild.

Für eine Kugel mit dem Radius r gelten für A und V die Formeln $A = 4\,\pi\,r^2$ und $V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$.

Bei einer Eiskugel mit demselben Volumen wie der würfelförmige Eiswürfel mit 3 cm Kantenlänge ist der Quotient $\frac{A}{V}$ kleiner als 2.

3. (4 Punkte) Berechnen Sie diesen Quotienten algebraisch für diese Eiskugel. Runden Sie das Ergebnis auf 2 Dezimalstellen.

Eine Eiskugel wird in ein Glas Wasser gelegt, wonach die Eiskugel im Wasser schwimmt. Zu dem Zeitpunkt, an dem die Eiskugel ins Wasser gelegt wird, hat sie einen Radius von 1,5 cm. Es gilt, dass 92 % des Volumens der Eiskugel unter Wasser und 8 % darüber liegen. Das Volumen der Eiskugel beträgt dann $\frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}5^3 \approx 14{,}137\,\text{cm}^3$. Der Teil der Eiskugel unter der Wasseroberfläche kann als Rotationskörper angesehen werden, der entsteht, wenn sich ein Teil des Kreises mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 2{,}25$ um die y-Achse dreht. Siehe dazu die Abbildung unten.



4. **(5 Punkte) Berechnen Sie, wie viele** cm **die Eiskugel beim Eintauchen ins Wasser über das Wasser hinausragt. Runden Sie das Ergebnis auf 2 Dezimalstellen.**

In einem mathematischen Modell zum Schmelzen einer Eiskugel wird angenommen, dass die Eiskugel während des Schmelzens kugelförmig bleibt. Der Radius der Eiskugel hängt von der Zeit ab. Der Radius der Eiskugel zum Zeitpunkt t ist $r(t)$, wobei t in Minuten angegeben ist.

Das Volumen der Eiskugel zum Zeitpunkt t ist dann $V(t) = \frac{4}{3}\pi\,(r(t))^3$. Im Modell wird ferner angenommen, dass $r(t)$ linear ist.

Eine Eiskugel hat zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Radius von 1,5 cm. Zum Zeitpunkt $t = 10$ hat sich das Volumen dieser Eiskugel halbiert. Ab einer bestimmten Zeit ist kein Eis mehr vorhanden.

5. **(5 Punkte) Berechnen Sie, nach wie vielen Minuten zum ersten Mal kein Eis mehr vorhanden ist.**

IJsbol

De snelheid waarmee een ijsklontje smelt, hangt onder andere af van de verhouding tussen de oppervlakte A in cm^2 en het volume V in cm^3 van het ijsklontje. Deze verhouding wordt uitgedrukt in het quotiënt $\frac{A}{V}$.
Voorbeeld: bij een kubusvormig ijsklontje met ribben van 3 cm is dit quotiënt gelijk aan $\frac{54}{27} = 2$.

foto

Er zijn ook bolvormige ijsklontjes ofwel **ijsbollen**. Zie de foto.

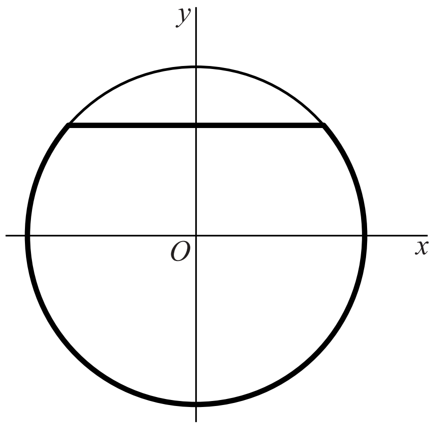
Voor een bol met straal r gelden voor A en V de formules $A = 4\pi r^2$ en $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Bij een ijsbol met hetzelfde volume als het genoemde kubusvormige ijsklontje met ribben van 3 cm is het quotiënt $\frac{A}{V}$ kleiner dan 2.

4p **3** Bereken algebraïsch dit quotiënt bij deze ijsbol. Rond je eindantwoord af op 2 decimalen.

Een ijsbol wordt in een glas water gedaan, waarna de ijsbol in het water drijft. Op het moment dat de ijsbol in het water wordt gedaan, heeft deze een straal van 1,5 cm. Er geldt dat 92% van het volume van de ijsbol onder water zit en 8% erboven. Het volume van de ijsbol is dan $\frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}5^3 \approx 14{,}137$ cm^3.
Het deel van de ijsbol onder het wateroppervlak is op te vatten als een omwentelingslichaam dat ontstaat bij wenteling van een deel van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 2{,}25$ om de y-as. Zie de figuur.

figuur



5p **4** Bereken hoeveel cm de ijsbol boven het water uitsteekt op het moment dat hij in het water wordt gedaan. Rond je eindantwoord af op 2 decimalen.

lees verder ►►►

In een wiskundig model van het smelten van een ijsbol wordt ervan uitgegaan dat de ijsbol tijdens het smelten bolvormig blijft.
De straal van de ijsbol is afhankelijk van de tijd. De straal van de ijsbol op tijdstip t is $r(t)$, met t in minuten.

Het volume van de ijsbol op tijdstip t is dan $V(t)=\frac{4}{3}\pi\left(r(t)\right)^3$. In het model wordt er verder van uitgegaan dat de formule van $r(t)$ lineair is.

Een ijsbol heeft op tijdstip $t=0$ een straal van 1,5 cm. Op tijdstip $t=10$ is het volume van deze ijsbol gehalveerd. Vanaf een bepaald tijdstip is er geen ijs meer aanwezig.

5p **5** Bereken vanaf welk geheel aantal minuten er voor het eerst geen ijs meer aanwezig is.

Konstantes Verhältnis (Lösungen)

Für $a > 0$ ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = x - x\,\ln(a\,x)$.

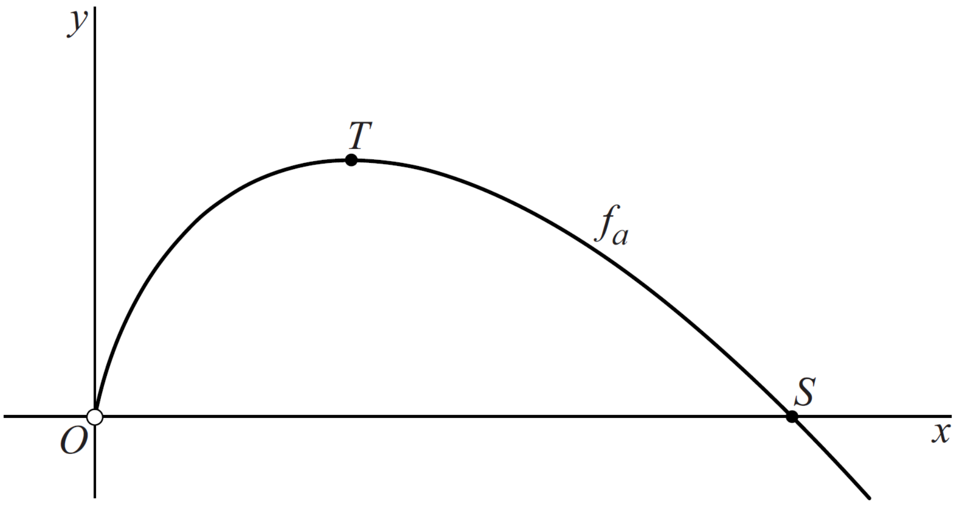
6. (4 Punkte) Beweisen Sie, dass für jeden zulässigen Wert von x gilt:

$$\frac{f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x)}{2} = f_1(x)$$

Für jeden positiven Wert von a gilt:

- Der Graph von f_a schneidet die x-Achse in genau einem Punkt S (mit x-Koordinate x_S).
- Der Graph von f_a hat ein globales Maximum T (mit x-Koordinate x_T).

Die Abbildung unten zeigt den Graphen von f_a und die Punkte S und T für einen bestimmten Wert a.



7. (7 Punkte) Beweisen Sie, dass für jeden positiven Wert von a das Verhältnis $\frac{x_S}{x_T}$ konstant ist.

Constante verhouding

Voor $a > 0$ wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = x - x\ln(ax)$.

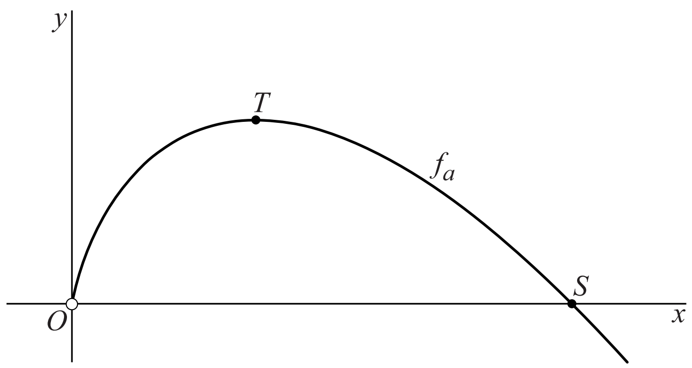
4p **6** Bewijs dat voor elke toegestane waarde van x geldt:

$$\frac{f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x)}{2} = f_1(x)$$

Voor elke positieve waarde van a geldt:
- de grafiek van f_a snijdt de x-as in precies één punt S (met x-coördinaat x_S);
- de grafiek van f_a heeft één top T (met x-coördinaat x_T).

In de figuur zijn voor een waarde van a de grafiek van f_a en de punten S en T weergegeven.

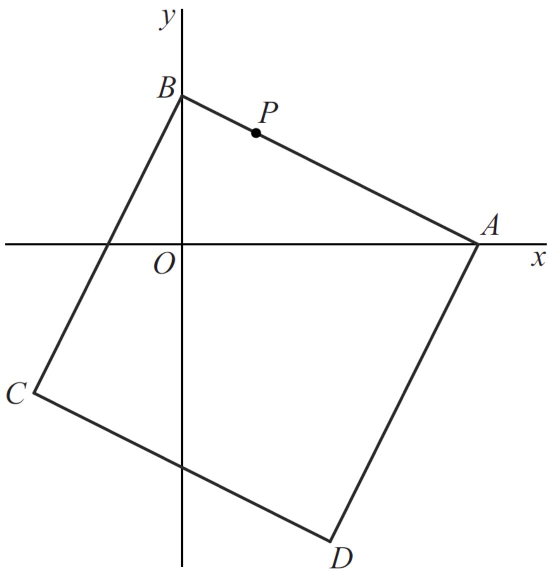
figuur



7p **7** Bewijs dat voor elke positieve waarde van a de verhouding $\frac{x_S}{x_T}$ constant is.

Gekipptes Quadrat (Lösungen)

Gegeben ist das Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten $A\,(8,0)$, $B\,(0,4)$, $C\,(-4,-4)$ und $D\,(4,-8)$. Der Punkt $P\,(2,3)$ liegt auf der Seite AB. Siehe dazu die Abbildung unten.

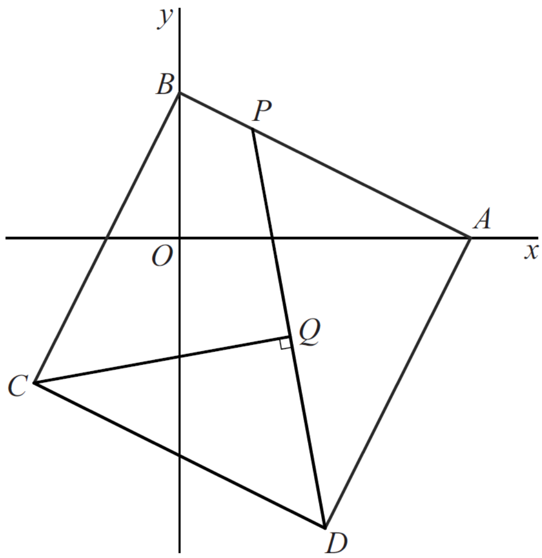


Die Punkte B, C und P liegen auf einem Kreis.

8. (5 Punkte) Stellen Sie eine Gleichung für diesen Kreis auf.

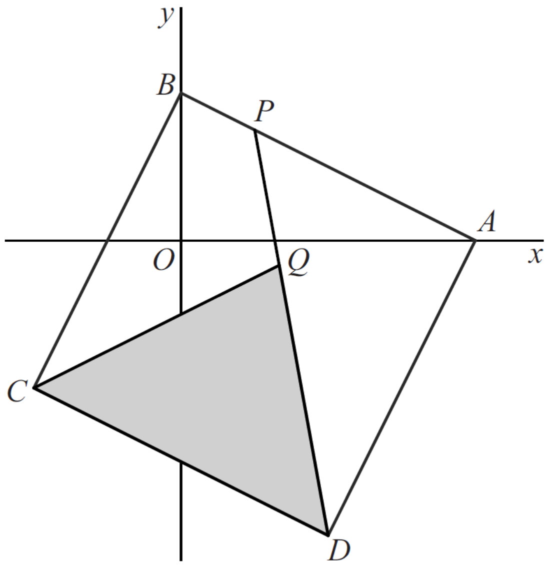
Ein Punkt Q bewegt sich über die Strecke DP von D nach P.

Es gibt eine Position von Q, für die die Strecke CQ senkrecht zur Strecke DP ist. Siehe dazu die Abbildung unten.



9. (5 Punkte) Berechnen Sie für diese Position die Koordinaten von Q.

In Abbildung 3 ist das Dreieck CDQ grau dargestellt. Es gibt eine Position von Q, an der die Fläche des Dreiecks CDQ ein Drittel der Fläche des Quadrats $ABCD$ beträgt.

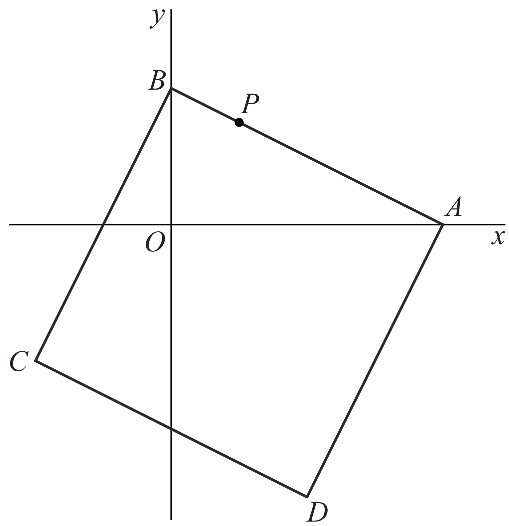


10. (5 Punkte) Berechnen Sie für diese Position die Koordinaten von Q.

Gekanteld vierkant

Gegeven is het vierkant $ABCD$ met hoekpunten $A(8, 0)$, $B(0, 4)$, $C(-4, -4)$ en $D(4, -8)$.
Op zijde AB ligt het punt $P(2, 3)$.
Zie figuur 1.

figuur 1



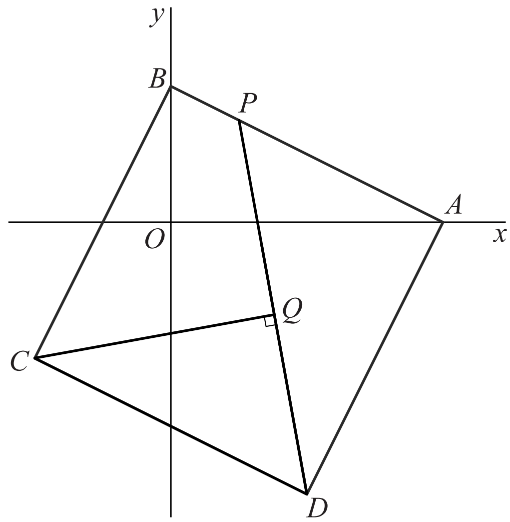
De punten B, C en P liggen op één cirkel.

5p **8** Stel een vergelijking op van deze cirkel.

Over lijnstuk DP beweegt (van D naar P) een punt Q.

Er is een positie van Q waarvoor lijnstuk CQ loodrecht staat op lijnstuk DP. Zie figuur 2.

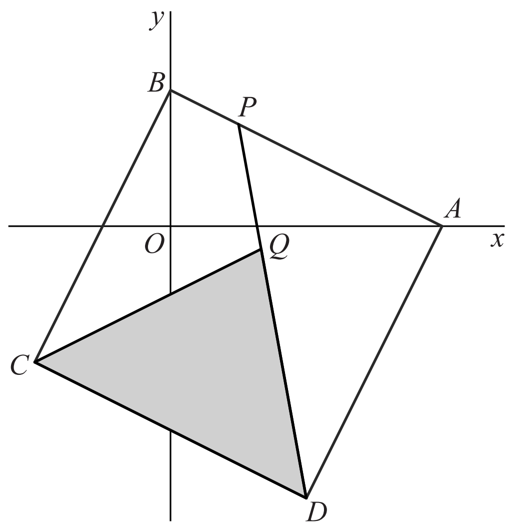
figuur 2



5p **9** Bereken voor deze positie exact de coördinaten van Q.

In figuur 3 is driehoek CDQ grijs gemaakt.
Er is een positie van Q waarbij de oppervlakte van driehoek CDQ een derde deel is van de oppervlakte van vierkant $ABCD$.

figuur 3



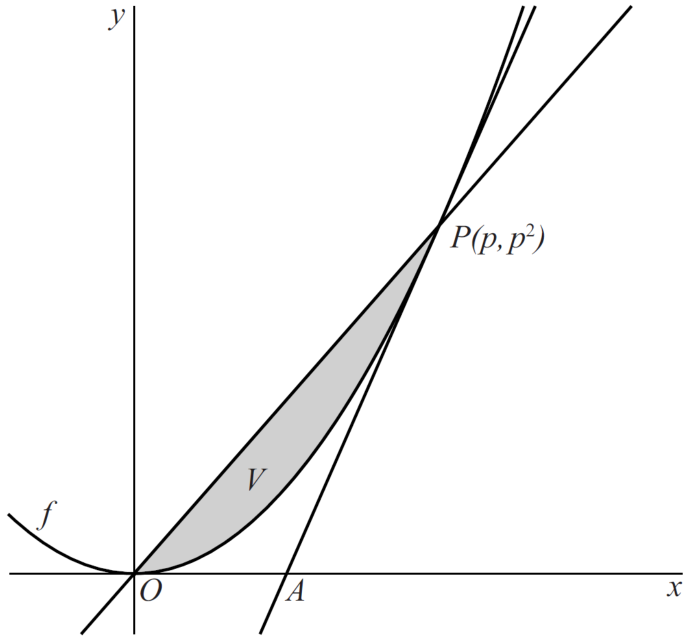
5p **10** Bereken voor deze positie exact de coördinaten van Q.

Eineinhalb Mal so groß (Lösungen)

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = x^2$.

Die Tangente an den Graphen von f in einem Punkt $P\,(p, p^2)$ mit $p > 0$ schneidet die x-Achse an einem Punkt A.

V ist die Fläche des Bereichs, der vom Graphen von f und der Strecke OP eingeschlossen wird. Siehe dazu die Abbildung unten.



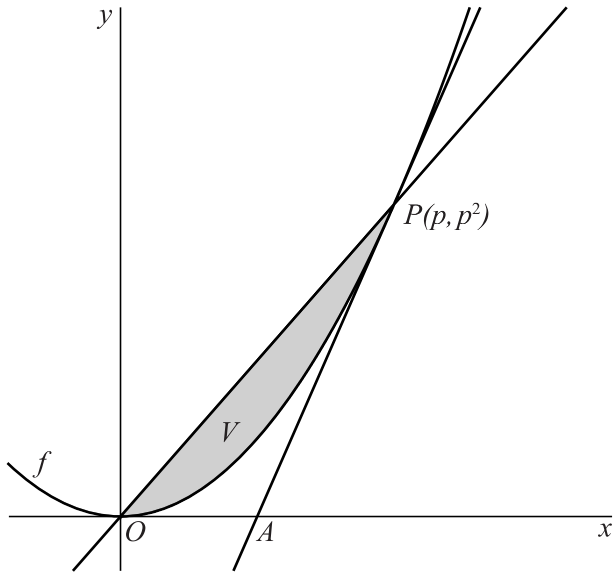
11. **(8 Punkte) Beweisen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OAP das Eineinhalbfache des Flächeninhalts von V ist.**

Anderhalf keer zo groot

De functie f is gegeven door $f(x) = x^2$.

De raaklijn aan de grafiek van f in een punt $P(p, p^2)$ met $p > 0$ snijdt de x-as in een punt A.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn OP.
Zie de figuur.

figuur



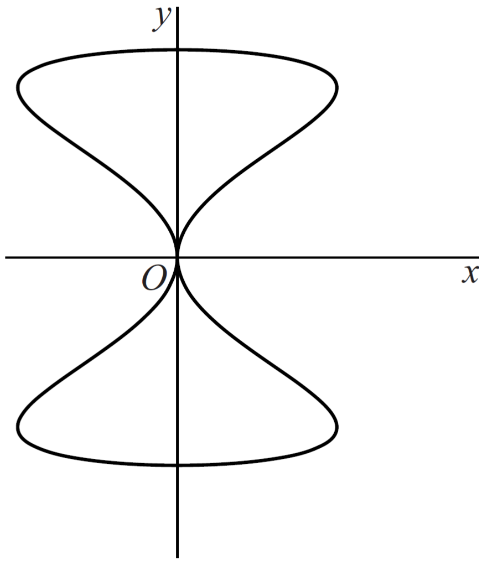
8p **11** Bewijs dat de oppervlakte van driehoek OAP anderhalf keer zo groot is als de oppervlakte van V.

Eine Bahn (Lösungen)

Ein Punkt bewegt sich für $0 \leq t \leq 2\,\pi$ gemäß den Bewegungsgleichungen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)\,\sin(2\,t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

Die Bahn des sich bewegenden Punktes ist in der Abbildung unten gezeigt.



Für $t = \frac{1}{2}\,\pi$ und $t = 1\,\frac{1}{2}\,\pi$ befindet sich der Punkt in O. Wir werden diese Situation nicht im gesamten Problem berücksichtigen.

P_t ist die Position des Punktes zum Zeitpunkt t.

Es gilt: Die Gerade durch P_a und $P_{\pi-a}$ ist für jeden möglichen Wert eine Vertikale.

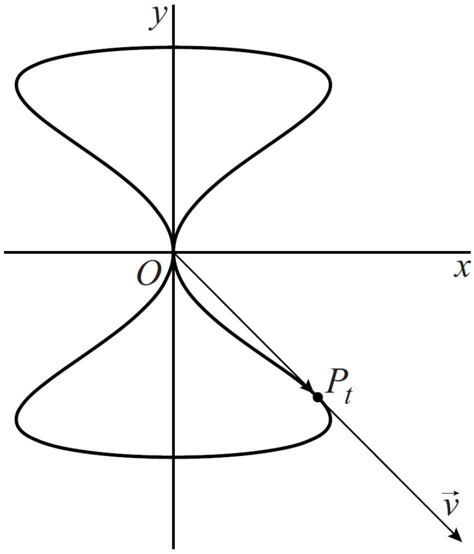
12. (3 Punkte) Beweisen Sie, dass diese Linie tatsächlich vertikal ist.

Es gibt mehrere Zeitpunkte, an denen der Abstand von P_t zur x-Achse doppelt so groß ist wie der Abstand von P_t zur y-Achse.

13. (5 Punkte) Berechnen Sie wann dies zum vierten Mal der Fall ist.

Für jeden Wert von t kann der Geschwindigkeitsvektor v vom Punkt P_t und der Vektor $\overrightarrow{OP_t}$ gezeichnet werden.

In der Abbildung unten sind der Punkt P_t, der Vektor $\overrightarrow{OP_t}$ und der Vektor $\vec{v}$ für $t = \frac{3}{4}\,\pi$ eingezeichnet.



14. (5 Punkte) Beweisen Sie, dass für $t = \frac{3}{4}\pi$ gilt: $\overrightarrow{OP_t} = \vec{v}$

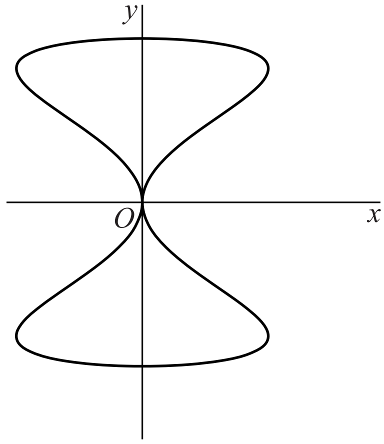
Een baan

Een punt beweegt voor $0 \le t \le 2\pi$ volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)\sin(2t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

De baan van het bewegende punt is weergegeven in figuur 1.

figuur 1



Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ bevindt het bewegende punt zich in O. Deze situatie laten we in de gehele opgave verder buiten beschouwing.

P_t is de positie van het bewegende punt op tijdstip t.

Er geldt: de lijn door P_a en $P_{\pi-a}$ is voor elke in deze situatie mogelijke waarde van a verticaal.

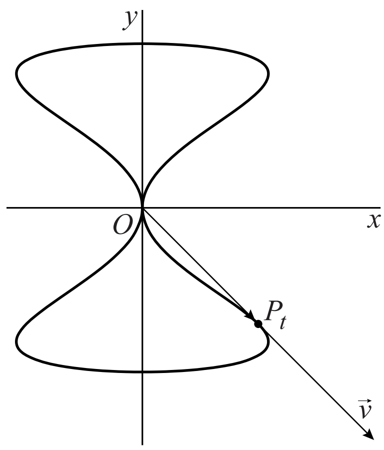
3p **12** Bewijs dat die lijn inderdaad verticaal is.

Er zijn meerdere tijdstippen waarvoor geldt dat de afstand van P_t tot de x-as twee keer zo groot is als de afstand van P_t tot de y-as.

5p **13** Bereken exact het vierde tijdstip waarvoor dit het geval is.

Voor iedere waarde van t kunnen de snelheidsvector $\vec{v}$ vanuit punt P_t en de vector $\overrightarrow{OP_t}$ worden getekend.
In figuur 2 zijn punt P_t, vector $\overrightarrow{OP_t}$ en vector $\vec{v}$ getekend voor $t = \frac{3}{4}\pi$.

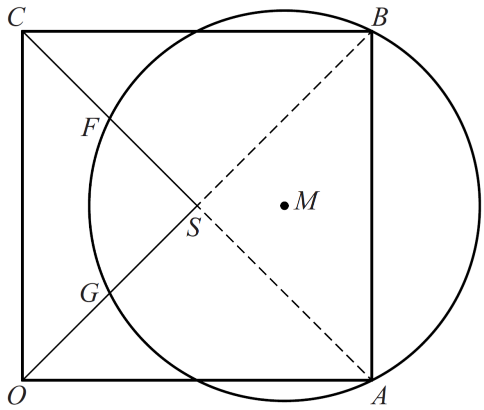
figuur 2



5p **14** Bewijs dat voor $t = \frac{3}{4}\pi$ geldt: $\overrightarrow{OP_t} = \vec{v}$

Außerhalb eines Quadrats (Lösungen)

Gegeben ist das Quadrat $OABC$ mit $O\,(0,0)$, $A\,(4,0)$ und $C\,(0,4)$. Der Schnittpunkt von OB und AC ist der Punkt S. Der Punkt $M\,(3,2)$ ist der Mittelpunkt eines Kreises durch A und B. Die Punkte F und G sind die Schnittpunkte dieses Kreises mit CS bzw. OS. Siehe dazu die Abbildung unten.

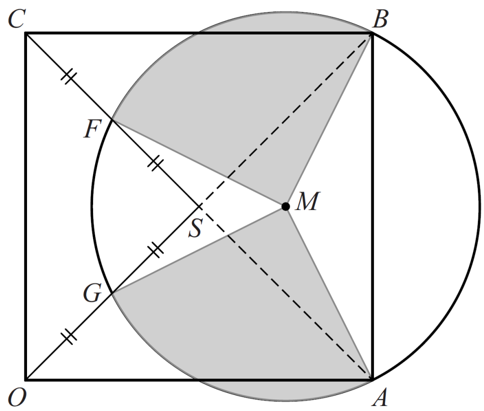


Es gilt: F ist der Halbierungspunkt der Strecke CS.

15. (5 Punkte) Beweisen Sie, dass F tatsächlich der Halbierungspunkt der Strecke CS ist.

Darüber hinaus ist G der Halbierungspunkt der Strecke OS.

In der Abbildung unten sind die Kreissektoren BMF und GMA grau eingefärbt.



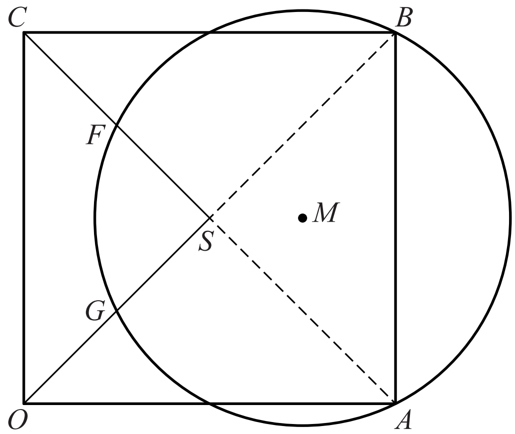
Die Summe der Flächeninhalte dieser beiden Sektoren entspricht dem halben Flächeninhalt des Kreises.

16. (3 Punkte) Beweisen Sie das.

Buiten een vierkant

Gegeven is het vierkant $OABC$ met $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ en $C(0, 4)$.
Het snijpunt van OB en AC is het punt S.
Het punt $M(3, 2)$ is het middelpunt van een cirkel door A en B.
De punten F en G zijn de snijpunten van deze cirkel met CS respectievelijk OS. Zie figuur 1.

figuur 1



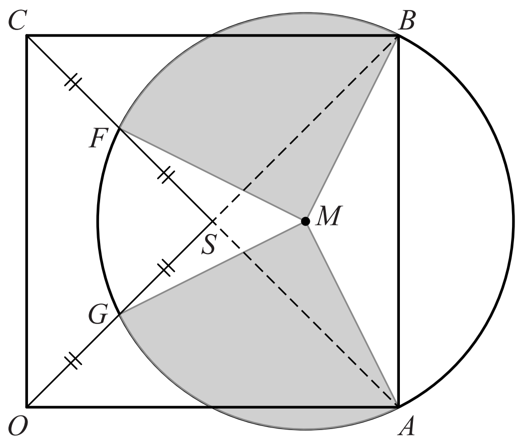
Er geldt: F is het midden van CS.

5p **15** Bewijs dat F inderdaad het midden is van CS.

Verder geldt: G is het midden van OS.

In figuur 2 zijn de cirkelsectoren BMF en GMA grijs gemaakt.

figuur 2



De oppervlakte van deze twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel.

3p **16** Bewijs dit.