Zentral gestellte niederländische Reifeprüfung Mathematik; https://wiskunde-examens.nl

Wir stellen hier eine Übersetzung der Aufgabenstellungen der niederländischen Reifeprüfung Mathematik (vwo wiskunde B) zur Verfügung. Die Übersetzung wurde vom *Mathematik macht Freu(n)de*-Team mit Unterstützung von *Google Translate* angefertigt. Die Originaldatei ist jeweils nach dem entsprechenden übersetzten Aufgabenblock eingebunden. Bilder und Grafiken wurden aus der Originaldatei in die Übersetzung direkt übernommen. Irrtümer vorbehalten.

vwo wiskunde B – 1. Termin 2019

Geraden durch den Ursprung und durch einen Kreis

Gegeben ist der Kreis c mit Mittelpunkt $(1, 7)$ und Radius 5.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist eine Vektordarstellung einer Geraden k durch den Ursprung.

Die Gerade k schneidet den Kreis c in zwei Punkten.

1. (5 Punkte) Berechnen Sie die exakten Koordinaten dieser Schnittpunkte.

Lijnen door de oorsprong en een cirkel

Gegeven is cirkel c met middelpunt $(1, 7)$ en straal 5.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is een vectorvoorstelling van een lijn k door de oorsprong.

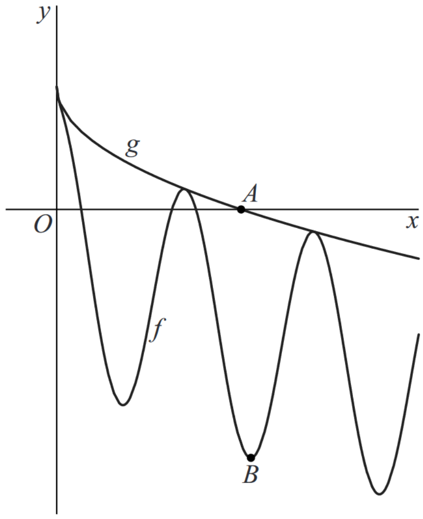
Lijn k snijdt cirkel c in twee punten.

5p **1** Bereken exact de coördinaten van deze snijpunten.

Rechts vom Schnittpunkt

Die Funktionen f und g sind gegeben durch:

$$f(x) = 3\cos(2x) - \sqrt{2x} \text{ und}$$
$$g(x) = 3 - \sqrt{2x}$$



Der Graph von g schneidet die x-Achse im Punkt A. Der Graph von f hat mehrere lokale Extrema, alle mit einer positiven x-Koordinate. Punkt B ist das dritte dieser lokalen Extrema. Siehe dazu die Abbildung rechts.

Es gilt: Punkt B befindet sich rechts von Punkt A.

2. (5 Punkte) Zeigen Sie dies mithilfe der 1. Ableitung von f.

Rechts van het snijpunt

De functies f en g zijn gegeven door:

$f(x) = 3\cos(2x) - \sqrt{2x}$ en

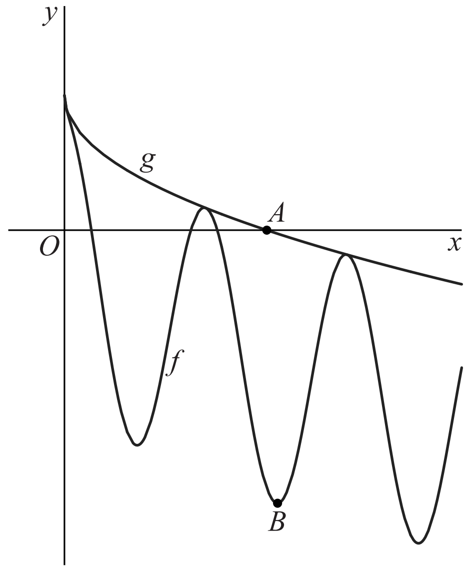
$g(x) = 3 - \sqrt{2x}$

De grafiek van g snijdt de x-as in punt A.
De grafiek van f heeft diverse toppen, alle met een positieve x-coördinaat.
Punt B is de derde van deze toppen.
Zie de figuur.

Er geldt: punt B ligt rechts van punt A.

5p **2** Toon dit aan met behulp van de afgeleide van f.

figuur

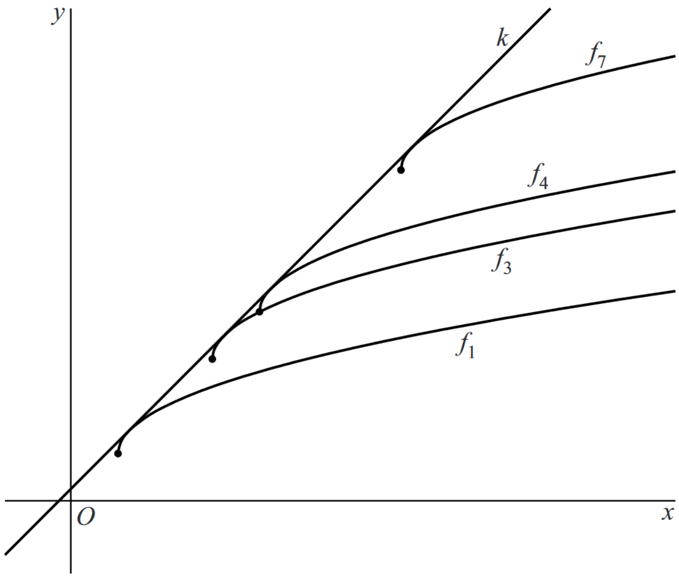


Immer ein Treffer

Für $p \geq 1$ ist die Funktion f_p gegeben durch:

$$f_p(x) = p + \sqrt{x - p}$$

Die Abbildung unten zeigt den Graphen von f_p für einige Werte von p ebenso wie die Gerade k mit der Gleichung $y = x + \frac{1}{4}$.



Die Gerade k berührt den Graphen von f_p für jeden Wert $p \geq 1$.

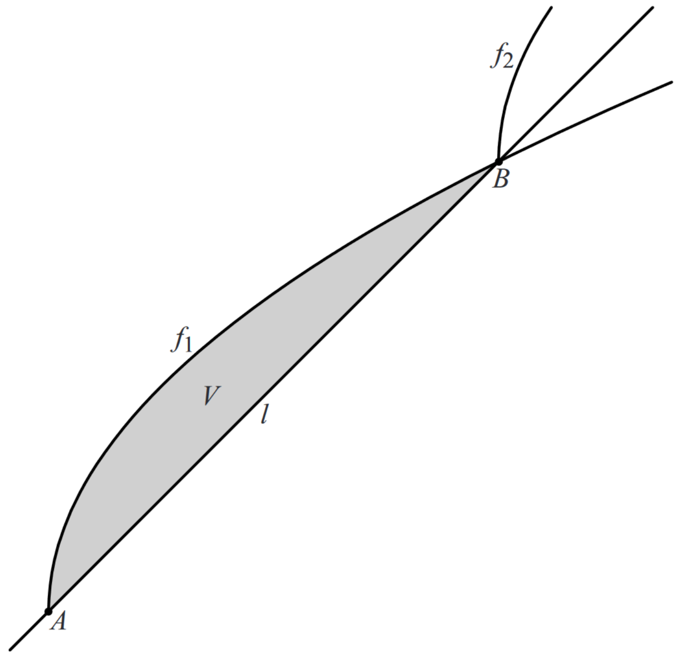
3. (5 Punkte) Beweisen Sie dies.

Für $p \geq 1$ hat der Graph von f_p einen Randpunkt. Die Randpunkte der Graphen in der Abbildung sind durch einen Punkt gekennzeichnet.

Für jedes $p \geq 1$ gilt: Der Randpunkt des Graphen von f_p liegt auf dem Graphen von f_{p-1}.

4. (3 Punkte) Beweisen Sie, dass dies tatsächlich für $p \geq 1$ gilt: der Randpunkt des Graphen von f_p liegt auf dem Graphen von f_{p-1}.

Der Punkt $A\,(1, 1)$ ist der Randpunkt des Graphen von f_1. Der Punkt $B\,(2, 2)$ ist der Randpunkt des Graphen von f_2. Also liegt B auf dem Graphen von f_1. Eine Gerade l verläuft durch die Punkte A und B. V ist der Flächeninhalt der Fläche, die von der Geraden l und dem Graphen von f_1 eingeschlossen wird. Siehe dazu die Abbildung unten.



5. (5 Punkte) Berechnen den exakten Flächeninhalt von V.

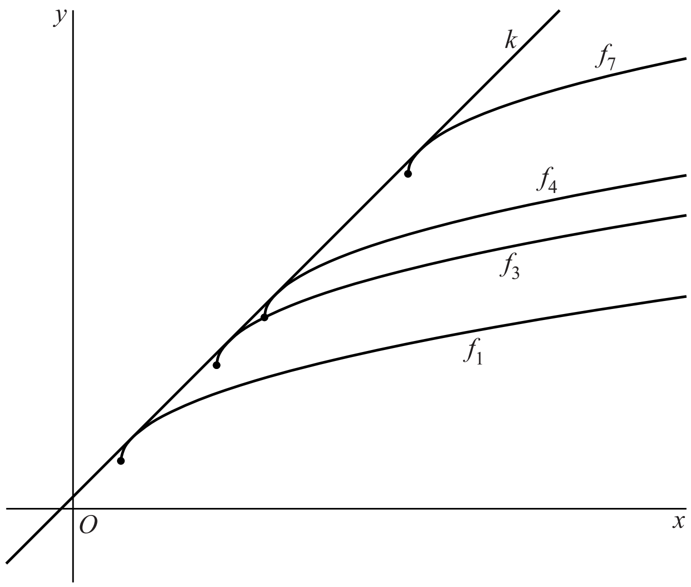
Altijd raak

Voor $p \geq 1$ is de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = p + \sqrt{x - p}$$

In figuur 1 is voor enkele waarden van p de grafiek van f_p weergegeven en ook lijn k met vergelijking $y = x + \frac{1}{4}$.

figuur 1



Lijn k raakt de grafiek van f_p voor elke waarde van $p \geq 1$.

5p **3** Bewijs dit.

Voor $p \geq 1$ heeft de grafiek van f_p een randpunt, ook wel beginpunt genoemd. De randpunten van de grafieken in figuur 1 zijn met een stip aangegeven.

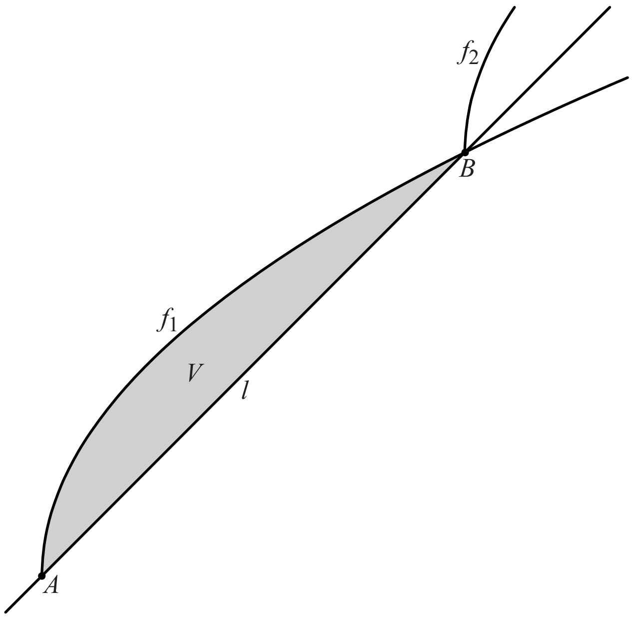
Er geldt voor elke $p \geq 1$: het randpunt van de grafiek van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}.

3p **4** Bewijs dat inderdaad voor $p \geq 1$ geldt: het randpunt van de grafiek van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}.

lees verder ►►►

Punt $A(1,1)$ is het randpunt van de grafiek van f_1. Punt $B(2,2)$ is het randpunt van de grafiek van f_2. B ligt dus op de grafiek van f_1.
Door de punten A en B gaat een lijn l.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door lijn l en de grafiek van f_1.
Zie figuur 2.

figuur 2



5p **5** Bereken exact de oppervlakte van V.

Schleuder

Die Schleuder ist eine Attraktion auf dem Messegelände. Eine Kapsel hängt an zwei gleich langen elastischen Seilen zwischen zwei Pfosten und kann zwei Personen unterbringen. Siehe dazu das Bild. Die Kapsel wird zuerst zu Boden gezogen, damit sie mit zwei Personen besetzt wird. Dann wird die Kapsel freigegeben. Die Kapsel schießt dann gerade nach oben. Dann fällt sie gerade nach unten, geht wieder hoch und so weiter. Nach einiger Zeit hängt die Kapsel ruhig.

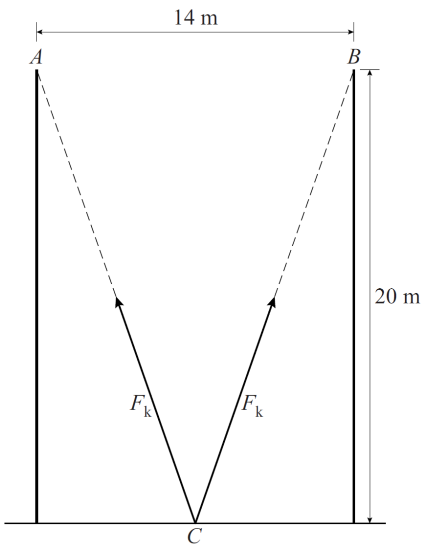
Bekannt ist:

– Die Pfosten sind 14 m voneinander entfernt.
– Die Pfosten sind vertikal.
– Die Pfosten sind 20 m hoch.
– Im ungedehnten Zustand ist jede Schnur 8 m lang.
– Jedes Seil zieht mit einer Kraft an der Kapsel, die von der Länge der gedehnten Seile abhängt. Die Größe dieser Kraft kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$F_k = 0{,}6 \cdot (L - 8)$$

F_k ist die Größe der Kraft in kN (Kilonewton) und L die Länge der gespannten Seile in m (mit $L \geq 8$).

Die Abbildung rechts zeigt die Ausgangsposition. Die Kapsel ist mit C markiert, die Spitzen der Pfosten mit A und B. Die Kapsel befindet sich auf dem Boden in der Mitte zwischen den Pfosten. Beide Seile, CA und CB, werden dann stark gedehnt.

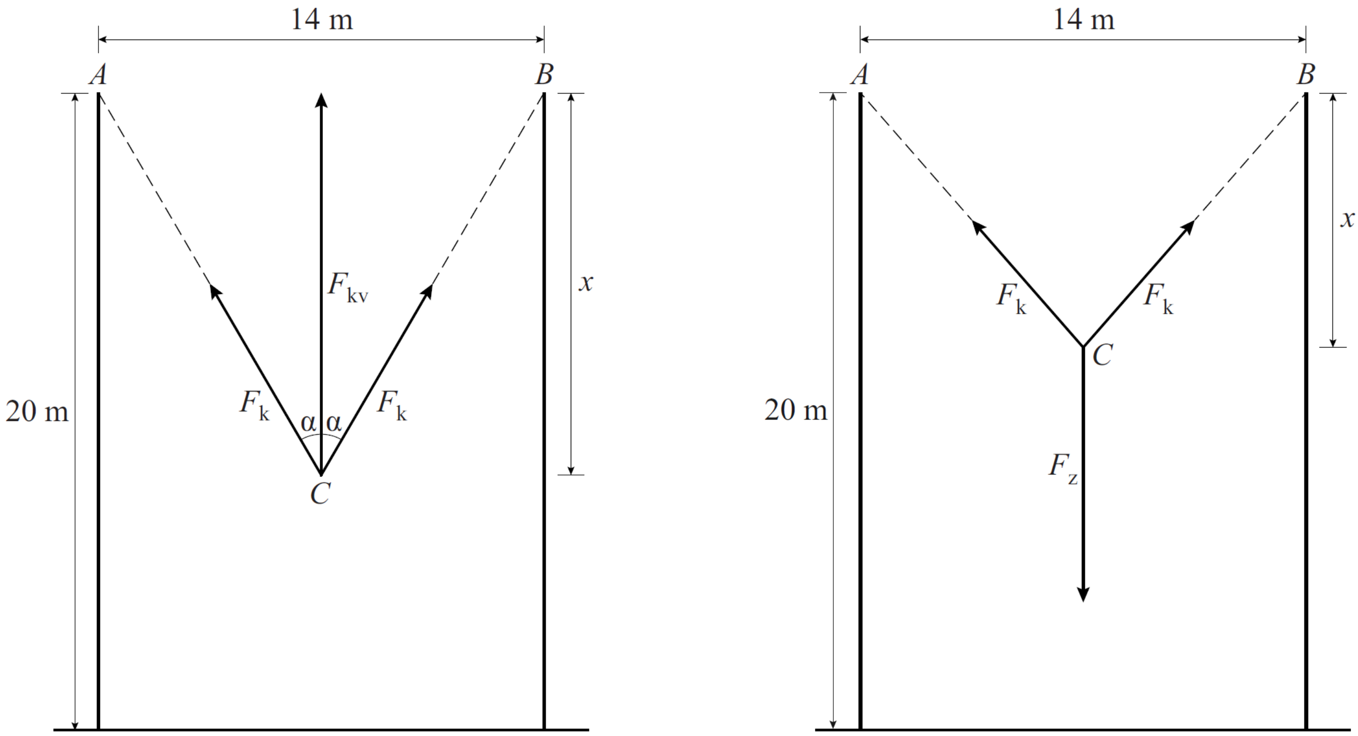


6. (3 Punkte) Berechnen Sie die Größe der Kraft in kN, mit der jedes der beiden Seile in der Ausgangsposition an der Kapsel zieht. Geben Sie Ihre Antwort auf eine Dezimalstelle genau an.

Sie können die beiden Kräfte mit zwei Vektoren darstellen. Die Summe dieser beiden Vektoren ist ein Vektor, der eine vertikale Kraft der Größe F_{kv} darstellt. Die Größe dieser Kraft kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$F_{kv} = 2 \cdot F_k \cdot \cos(\alpha)$$

Dabei ist α der Winkel zwischen einer Seil und dem vertikalen Vektor. Siehe dazu die Abbildung unten links.



Auf die Kapsel, einschließlich der beiden Personen, wirkt nicht nur die Kraft beider Seile, sondern auch die Schwerkraft F_z, die gerade nach unten gerichtet ist. Siehe dazu die Abbildung oben rechts. Die Schwerkraft beträgt 1,8 kN. Die beiden Abbildungen zeigen auch den Höhenunterschied x zwischen C und den Oberseiten der Pfosten.

Nach mehrmaligem Auf und Ab kommt die Kapsel zum Stillstand. An diesem Punkt heben die Schwerkraft und die beiden Kräfte, die von den Seilen ausgeübt werden, einander auf.

Es gilt dann: $F_{kv} = F_z$

Die Höhe, in der die Kapsel zum Stillstand kommt, kann berechnet werden, indem zuerst F_{kv} durch x ausgedrückt wird.

7. **(6 Punkte) Drücken Sie F_{kv} durch x aus und berechnen Sie, wie hoch die Kapsel über dem Boden hängt, wenn sie zum Stillstand gekommen ist. Geben Sie Ihre Antwort in ganzen Metern an.**

Slingshot

De Slingshot is een kermisattractie.
Tussen de toppen van twee palen hangt aan twee identieke elastische koorden een capsule die plaats biedt aan twee personen. Zie de foto.
De capsule wordt allereerst omlaag getrokken tot aan de grond. Op dat moment gaan er twee personen in de capsule zitten. Vervolgens wordt de capsule losgelaten. De capsule schiet dan recht omhoog. Daarna valt hij recht omlaag, gaat weer omhoog, enzovoorts. Na enige tijd komt de capsule stil te hangen.

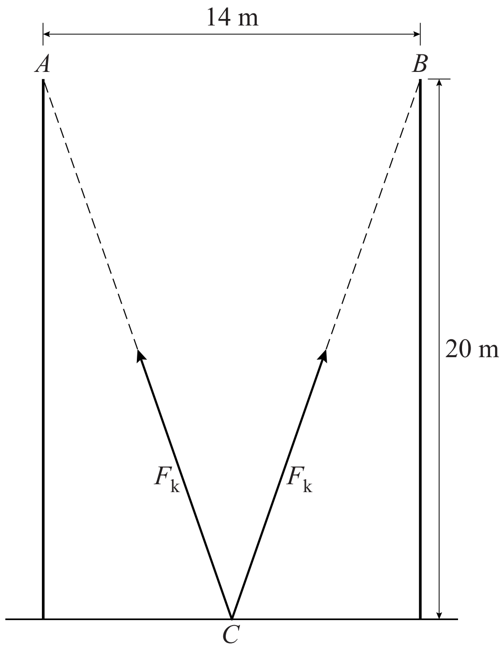
foto

Gegeven is:
- De palen staan 14 m uit elkaar.
- De palen staan verticaal.
- De palen zijn 20 m hoog.
- Zonder uitrekking heeft elk koord een lengte van 8 m.
- Elk koord trekt aan de capsule met een kracht die afhangt van de lengte van het uitgerekte koord. De grootte van deze kracht kan berekend worden met de formule:

  $$F_k = 0{,}6 \cdot (L - 8)$$

  Hierbij is F_k de grootte van de kracht in kN (kilonewton) en L de lengte van het uitgerekte koord in m (met $L \geq 8$).

figuur 1



In figuur 1 is de beginsituatie weergegeven. De capsule is aangegeven met het punt C en de toppen van de palen met A en B.
De capsule bevindt zich op de grond, midden tussen de palen.
Beide koorden, CA en CB, zijn dan flink uitgerekt en staan strak.

3p **6** Bereken de grootte van de kracht in kN waarmee een koord in de beginsituatie aan de capsule trekt. Geef je eindantwoord in één decimaal.

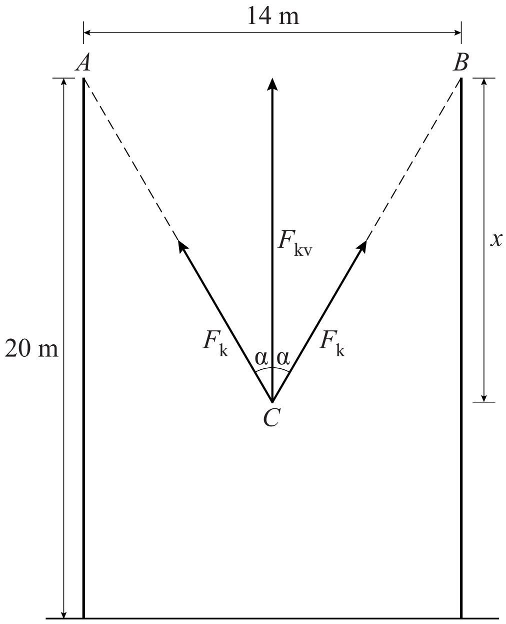
lees verder ►►►

De twee krachten kun je weergeven met twee vectoren.
De som van deze twee vectoren is een vector die een verticale kracht weergeeft met grootte F_{kv}. De grootte van deze kracht kan berekend worden met de volgende formule:

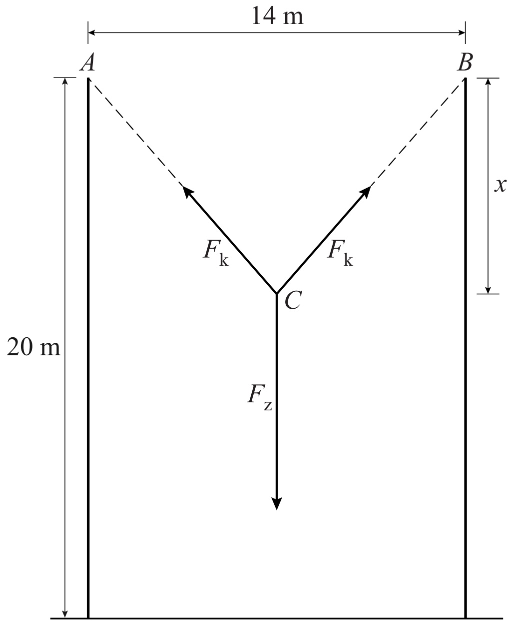
$$F_{kv} = 2 \cdot F_k \cdot \cos(\alpha)$$

Hierin is α de hoek tussen een koord en de verticale vector. Zie figuur 2.

figuur 2



figuur 3



Op de capsule, inclusief de twee personen, werkt niet alleen de kracht van beide koorden, maar ook de zwaartekracht F_z, die recht naar beneden is gericht. Zie figuur 3. Deze zwaartekracht bedraagt 1,8 kN.
In figuur 2 en figuur 3 is ook het hoogteverschil tussen C en de toppen van de palen met x aangegeven.

Na een aantal keren op en neer te zijn geslingerd, is de capsule tot stilstand gekomen. Op dat moment heft de zwaartekracht de twee krachten op die door de koorden samen worden uitgeoefend.

Er geldt dan dus: $F_{kv} = F_z$

De hoogte waarop de capsule tot stilstand komt, is te berekenen door eerst F_{kv} in x uit te drukken.

6p **7** Druk F_{kv} uit in x en bereken daarmee hoe hoog de capsule boven de grond hangt als hij tot stilstand is gekomen. Geef je eindantwoord in gehele meters.

Eine Logarithmusfunktion und ihre Ableitung

Die Funktionen f und g sind gegeben durch:

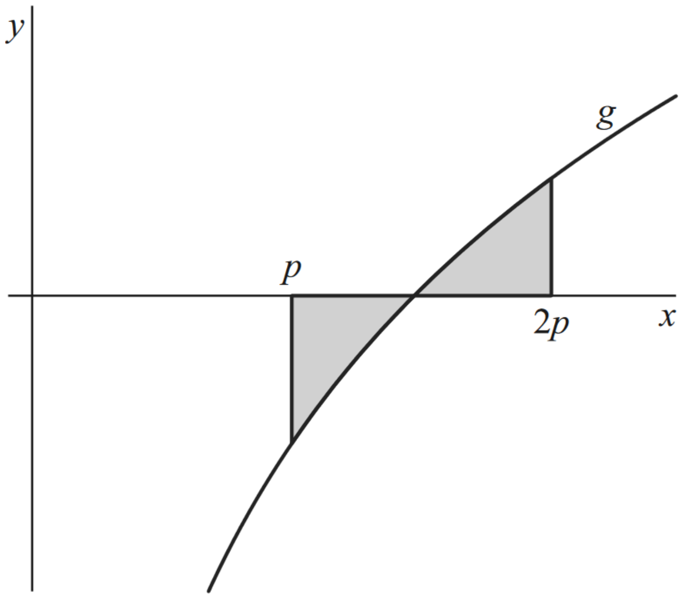
$$f(x) = x \ln(x) - x + 1$$
$$g(x) = f'(x)$$

8. (5 Punkte) Berechnen Sie die exakten x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g.

Es gibt einen Wert von p, sodass gilt:

$$\int_p^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Die Situation ist für diesen Wert von p in der Abbildung unten dargestellt.



9. (7 Punkte) Berechnen Sie genau diesen Wert von p. Schreiben Sie Ihre endgültige Antwort in der Form $p = a\,e$, wobei a eine Zahl ist.

Een logaritmische functie en haar afgeleide

De functies f en g worden gegeven door:

$$f(x) = x\ln(x) - x + 1$$
$$g(x) = f'(x)$$

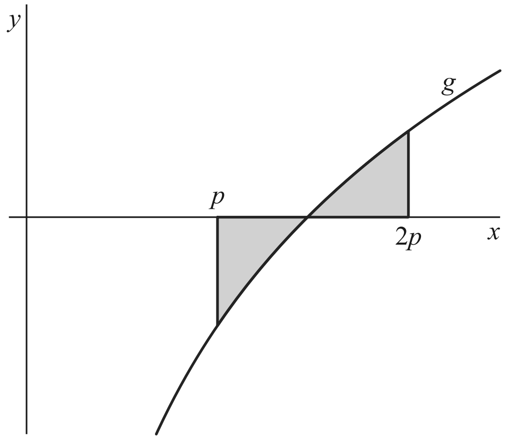
5p **8** Bereken exact de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

Er is één waarde van p waarvoor geldt:

$$\int_p^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Voor deze waarde van p is de situatie in de figuur geschetst.

figuur



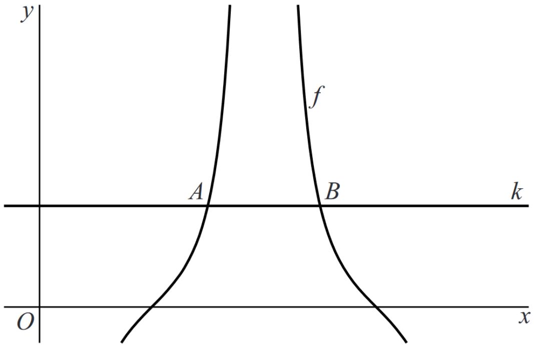
7p **9** Bereken exact deze waarde van p. Schrijf je eindantwoord in de vorm $p = a\mathrm{e}$, waarbij a een getal is.

Gebrochen trigonometrische Funktion

Die Funktion f ist gegeben durch:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)}$$

Die Gerade k ist die Gerade mit der Gleichung $y = \sqrt{2}$. Die Gerade k und der Graph von f haben eine unendliche Anzahl von Schnittpunkten. Die Punkte A und B sind die beiden Schnittpunkte mit den kleinsten positiven x-Koordinaten. Diese sind in der Abbildung rechts dargestellt.



10. (6 Punkte) Berechnen Sie die exakten x-Koordinaten von A und B.

Für jeden Wert von p ist die Funktion f_p gegeben durch:

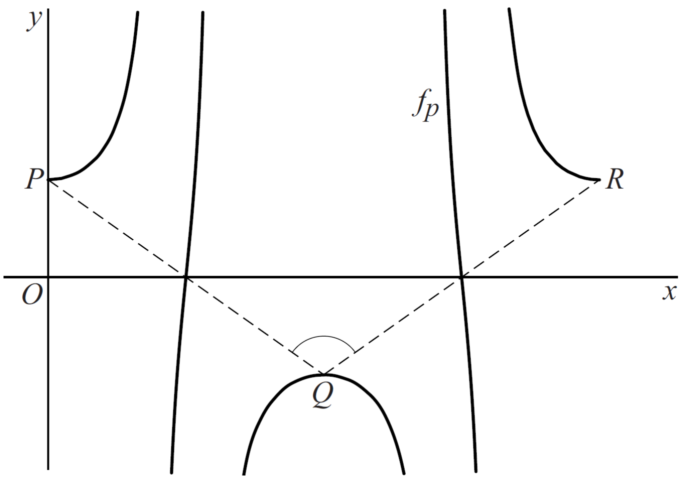
$$f_p(x) = \frac{\cos(x)}{p - \sin^2(x)}$$

11. (6 Punkte) Untersuchen Sie, ob es Werte von p gibt, für die der Graph von f_p Sprünge aufweist.

Im letzten Teil der Aufgabe beschränken wir uns auf Werte von p, für die gilt: $p \neq 0$

Die Punkte auf dem Graphen von f_p mit den x-Koordinaten 0, pi und 2π heißen P, Q und R. Die Abbildung unten zeigt den Graphen von f_p für einen Wert p.

Die Liniensegmente PQ und QR sind ebenfalls dargestellt.



Es gibt Werte von p, für die PQ und QR senkrecht aufeinander stehen.

12. (4 Punkte) Finden Sie diese Werte von p.

Gebroken goniometrische functie

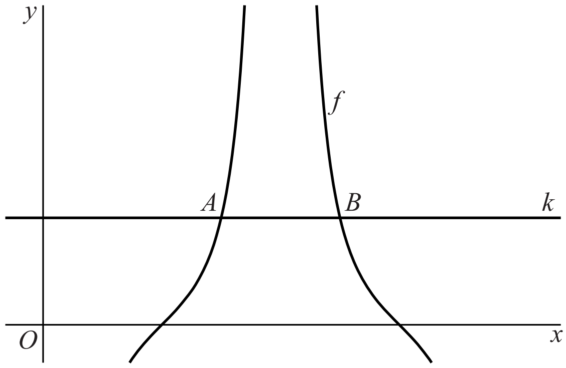
De functie f is gegeven door:

$$f(x)=\frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)}$$

Lijn k is de lijn met vergelijking $y=\sqrt{2}$.

Lijn k en de grafiek van f hebben oneindig veel snijpunten. De punten A en B zijn de twee snijpunten met de kleinste positieve x-coördinaten. Deze zijn in figuur 1 aangegeven.

figuur 1



6p **10** Bereken exact de x-coördinaten van A en B.

Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x)=\frac{\cos(x)}{p-\sin^2(x)}$$

6p **11** Onderzoek of er waarden van p zijn waarvoor de grafiek van f_p perforaties heeft.

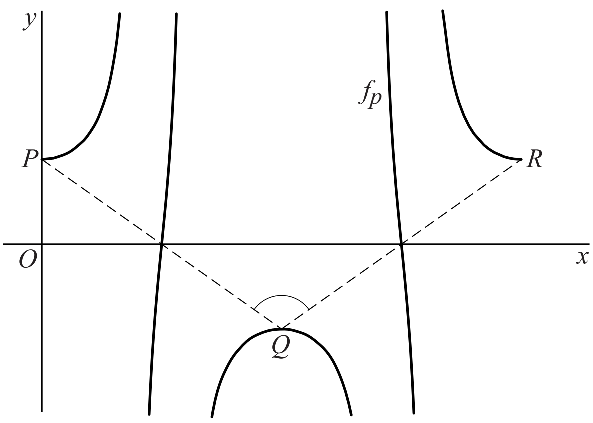
In de rest van de opgave beperken we ons tot waarden van p waarvoor geldt: $p \neq 0$

De punten op de grafiek van f_p met x-coördinaten 0, π en 2π noemen we respectievelijk P, Q en R.

In figuur 2 is voor een waarde van p de grafiek van f_p weergegeven.

Ook zijn de lijnstukken PQ en QR weergegeven.

figuur 2



Er zijn waarden van p waarvoor PQ en QR loodrecht op elkaar staan.

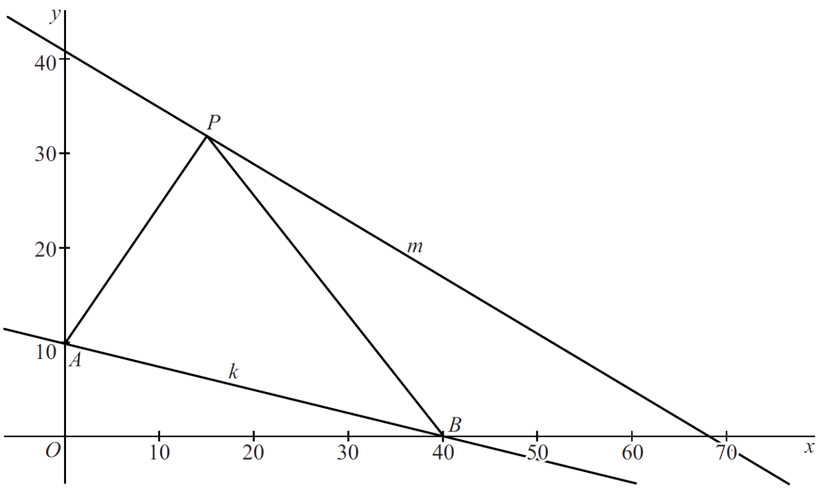
4p **12** Bereken exact deze waarden van p.

Dreieck mit beweglichem Scheitelpunkt

Die Gerade k verläuft durch die Punkte $A\,(0,10)$ und $B\,(40,0)$. Die Bahn eines Punktes P ist durch die folgenden Bewegungsgleichungen gegeben:

$$\begin{cases} x = 18 + 5\,t \\ y = 30 - 3\,t \end{cases}$$

Die Bahn des Punktes P ist die Gerade m. Siehe dazu die Abbildung unten.



An fast jeder Position auf der Bahn des Punktes P bilden die Punkte A, B und P ein Dreieck ABP. Es gibt eine Ausnahme.

13. (5 Punkte) Berechnen Sie die Koordinaten von P so, dass A, B und P nicht die Eckpunkte eines Dreiecks bilden.

14. (8 Punkte) Untersuchen Sie algebraisch, ob es eine Position auf der Bahn von P gibt, so dass das Dreieck ABP einen rechten Winkel bei P hat und ein gleichschenkliges Dreieck ist.

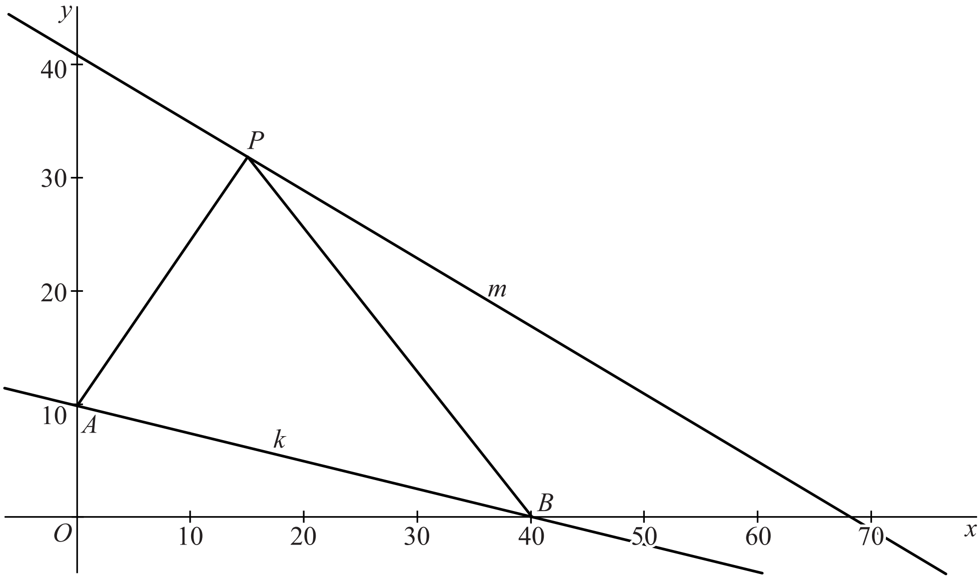
Driehoek met bewegend hoekpunt

Lijn k gaat door de punten $A(0,10)$ en $B(40,0)$.
De baan van een punt P is gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x = 18 + 5t \\ y = 30 - 3t \end{cases}$$

De baan van punt P is de lijn m. Zie de figuur.

figuur



Bij bijna elke positie van punt P vormen de punten A, B en P een driehoek ABP. Er is één uitzondering.

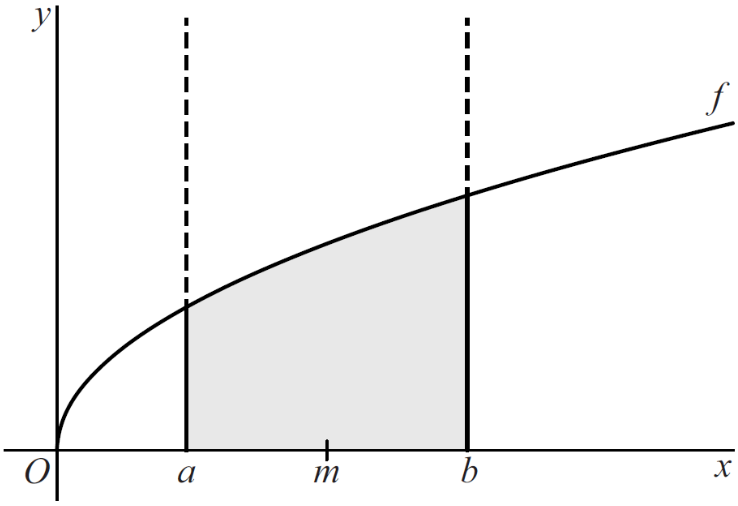
5p **13** Bereken de coördinaten van P zodat A, B en P niet de hoekpunten van een driehoek vormen.

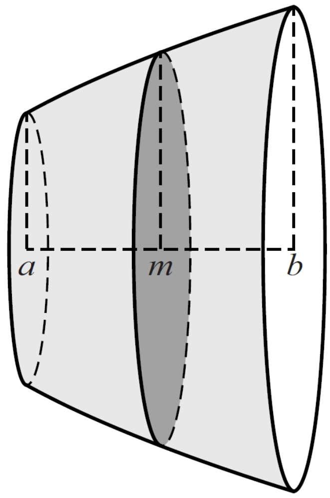
8p **14** Onderzoek op algebraïsche wijze of er een positie van P is, zó dat driehoek ABP een rechte hoek heeft bij P én driehoek ABP een gelijkbenige driehoek is.

Paraboloidstumpf

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = \sqrt{x}$. Der Graph von f ist in der Abbildung unten links dargestellt ebenso wie die Geraden $x = a$ und $x = b$, wobei $0 < a < b$. Der Punkt $(m, 0)$ liegt in der Mitte zwischen den Punkten $(a, 0)$ und $(b, 0)$.

Der Graph von f, die x-Achse und die beiden vertikalen Linien begrenzen einen Bereich. Dieser in der linken Abbildung grau dargestellte Bereich wird um die x-Achse gedreht. Der durch diese Drehung entstehende Körper ist ein abgeschnittenes Paraboloid oder auch **Paraboloidstumpf**. Dieser ist in der rechten Abbildung dargestellt.



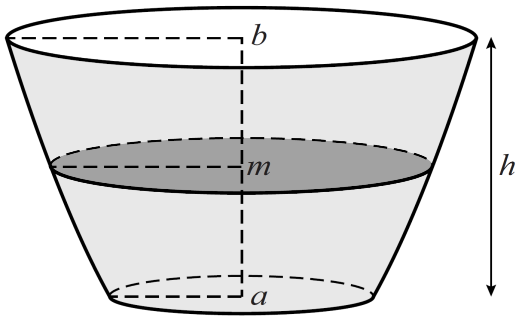


Jeder Punkt des Graphen von f beschreibt bei der Drehung einen Kreis. Die durch den Punkt (m, m) beschriebene Kreisfläche wird mit A bezeichnet. Die Kreisscheibe mit dieser Fläche ist in der Abbildung oben rechts dunkelgrau dargestellt.

Die Abbildung rechts zeigt das abgeschnittene Paraboloid, das um eine Vierteldrehung gedreht wurde. Auch die Höhe h des abgeschnittenen Paraboloids ist eingezeichnet.
Für das Volumen V des Paraboloidstumpfs gilt die Formel:

$$V = h \cdot A$$

15. (7 Punkte) Beweisen Sie dies.

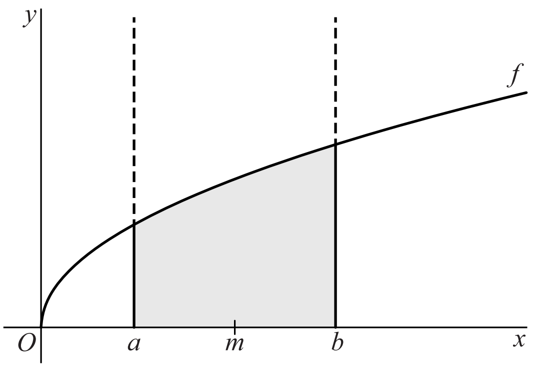


Afgeknotte paraboloïde

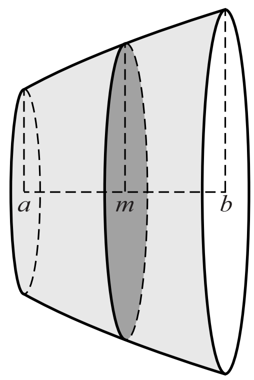
De functie f is gegeven door $f(x)=\sqrt{x}$. De grafiek van f is getekend in figuur 1, samen met de lijnen met vergelijkingen $x=a$ en $x=b$, waarbij $0<a<b$. Midden tussen de punten $(a,0)$ en $(b,0)$ ligt het punt $(m,0)$.

De grafiek van f, de x-as en de twee verticale lijnen sluiten een gebied in. Dit gebied, in figuur 1 met grijs aangegeven, wordt gewenteld om de x-as. Het omwentelingslichaam is een zogenaamde **afgeknotte paraboloïde**. Deze is afgebeeld in figuur 2.

figuur 1



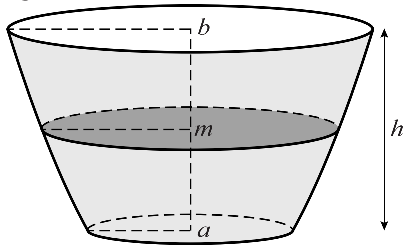
figuur 2



Bij de omwenteling beschrijft elk punt van de grafiek een cirkel.
De oppervlakte van de cirkel die beschreven wordt door het punt $(m,\sqrt{m})$ noemen we A. De cirkelschijf met deze oppervlakte is met donkergrijs aangegeven in figuur 2.

In figuur 3 staat de afgeknotte paraboloïde een kwartslag gedraaid. In die figuur is ook de hoogte h van de afgeknotte paraboloïde aangegeven.

figuur 3



Voor de inhoud V van de afgeknotte paraboloïde geldt de formule:

$$V=h\cdot A$$

7p **15** Bewijs dit.