

Ein Haufen Aufgaben zum Thema Gleichungen

Für alle Gleichungen in dieser Aufgabensammlung gilt:

- Die Grundmenge ist \mathbb{R} .
- Einsatz von Technologie ist nicht erlaubt (und auch nicht notwendig).
- Die Aufgaben sind methodisch geordnet.

Inhaltsverzeichnis

1	Quadratische Gleichungen	2
1.1	Aufwärmen	2
1.2	Scheitelpunktform quadratischer Terme	2
1.3	Faktorisieren durch Hinschauen	2
1.4	Lösungsformeln und Diskriminante	2
2	Polynomgleichungen	3
2.1	Spezialfälle	3
2.2	Standardfall	4
3	Wurzelgleichungen	4
3.1	Mit Vorsicht zu genießen...	4
4	Exponential- und Logarithmusgleichungen	5
4.1	Exponentialgleichungen	5
4.2	Logarithmusgleichungen	5
4.3	Zwei besonders harte Nüsse	5

1 Quadratische Gleichungen

1.1 Aufwärmen

Löse ohne Verwendung von Lösungsformeln.

a) $x^2 = 9$

d) $(x - 1)^2 = 16$

b) $x^2 = -4$

e) $x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$

c) $x^2 = 4 \cdot x$

f) $x^2 + 4 \cdot x - 5 = 0$

1.2 Scheitelpunktform quadratischer Terme

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion. Bringe den gegebenen Funktionsterm in Scheitelpunktform und ermittle dann Extremstelle, Extremwert und (ggf.) Nullstellen der Funktion. Skizziere zum Abschluss den Graphen von f .

a) $f(x) = x^2 + 4 \cdot x - 5$

c) $f(x) = 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 13$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$

d) $f(x) = -3 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 28$

1.3 Faktorisieren durch Hinschauen

Zerlege den quadratischen Term auf der linken Seite *durch Hinschauen* in Linearfaktoren und lies die Lösungen der Gleichung daraus ab.

Bemerkung: Bei den Aufgaben hier sind alle Lösungen ganzzahlig.

a) $x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0$

c) $3 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 9 = 0$

b) $x^2 - x - 12 = 0$

d) $5 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 10 = 0$

1.4 Lösungsformeln und Diskriminante

a) Seien $p, q \in \mathbb{R}$. Löse die quadratische Gleichung

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

durch quadratisches Ergänzen und zeige dadurch, dass

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

die Lösungen der Gleichung sind.

b) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Löse die quadratische Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

durch quadratisches Ergänzen oder mit den Erkenntnissen aus a) und zeige dadurch, dass

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

die Lösungen der Gleichung sind.

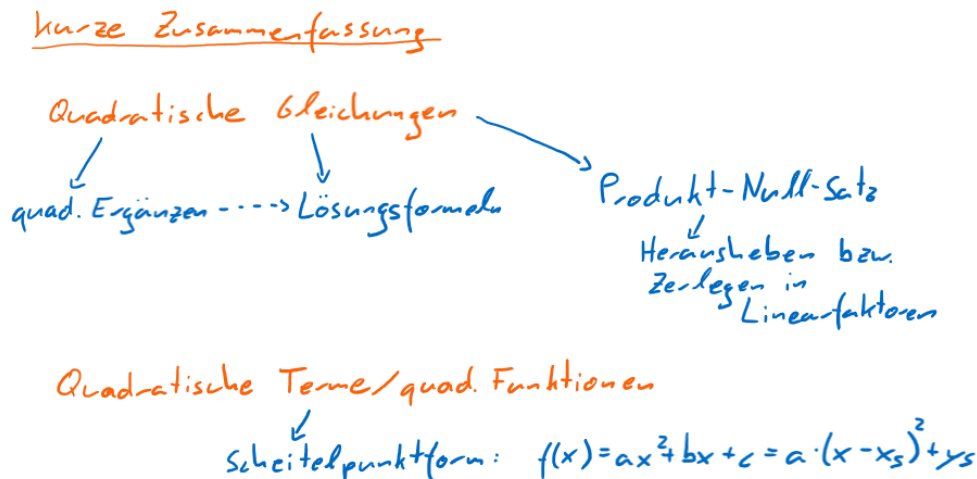
c) Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ hat die quadratische Gleichung

$$x^2 + (2 \cdot k - 4) \cdot x = 6 \cdot k - 7$$

- i) genau eine reelle Lösung? ii) keine reelle Lösung? iii) zwei reelle Lösungen?

Aufgabe 1. (Test am 18.12.2019)

Übersicht



Weitere Aufgaben zu quadratischen Termen und Gleichungen sind im **KH Termrechnung** in den Kapiteln **4** und **9** zu finden. Besonders interessant sind dabei die Anwendungsaufgaben in Kapitel **4** (Optimierungsaufgaben und Aufgaben aus der analytischen Geometrie).

2 Polynomgleichungen

2.1 Spezialfälle

Löse die Gleichung auf möglichst geschickte Art und Weise.

- a) $x^{44} - 3 \cdot x^{43} - 10 \cdot x^{42} = 0$
- b) $2 \cdot x^8 - 34 \cdot x^4 + 32 = 0$
- c) $3 \cdot (x + 3)^4 + 15 \cdot (x + 3)^2 - 108 = 0$
- d) $x \cdot (x^2 - 2 \cdot x - 15) \cdot (x^2 + 1) - 2 \cdot (x^2 - 2 \cdot x - 15) \cdot (x^2 + 1) = 0$
- e) $x^5 - 5 \cdot x^3 - 36 \cdot x = 0$

Aufgabe 5.1. (KH Termrechnung)

Aufgabe 1. (Test am 19.02.2021)

2.2 Standardfall

Löse die Gleichung, indem du die linke Seite (soweit wie möglich) in Linearfaktoren zerlegst.

Bemerkung: Jede Gleichung hier hat mindestens eine ganzzahlige Lösung. Warum ist das hilfreich?

a) $x^3 - 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0$

b) $x^3 - 2 \cdot x^2 + x - 2 = 0$

c) $10 \cdot x^3 + 13 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1 = 0$

d) $4 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 29 \cdot x + 21 = 0$ Aufgabe 3. (Test am 11.12.2020)

e) $x^4 - 10 \cdot x^3 + 35 \cdot x^2 - 50 \cdot x + 24 = 0$ Aufgabe 9.7.c) (KH Termrechnung)

Weitere Aufgaben zu Polynomen und Polynomgleichungen sind im **KH Termrechnung** in den Kapiteln **5** und **9** zu finden. Besonders interessant sind dabei auch die Aufgaben zu Ungleichungen in Kapitel **9**.

3 Wurzelgleichungen

3.1 Mit Vorsicht zu genießen...

Löse die Gleichung. Aber Achtung: Nicht jeder *Lösungskandidat* ist hier auch wirklich eine Lösung.

Warum eigentlich nicht?

a) $\sqrt{x-6} = -2$ Aufgabe 6.1.a) (KH Termrechnung)

b) $x + \sqrt{8-7 \cdot x} = 2$

c) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-3} - \sqrt{2 \cdot x + 25} = 0$ Aufgabe 2. (Test am 21.07.2020)

d) $\sqrt{5 \cdot x + 10} = \frac{10}{\sqrt{5 \cdot x + 10}} + 3$ Aufgabe 2. (Test am 18.12.2019)

e) $x + 10 \cdot \sqrt{x} - 24 = 0$ Aufgabe 6.4.a) (KH Termrechnung)

Weitere Aufgaben zu Wurzelgleichungen sind im **KH Termrechnung** in Kapitel **6** zu finden.

4 Exponential- und Logarithmusgleichungen

4.1 Exponentialgleichungen

Löse die Gleichung.

- a) $3 \cdot 4^{2 \cdot x - 1} - 2 = 46$ Aufgabe 7.1.b) (KH Termrechnung)
- b) $2^{x+7} \cdot 4^{x-2} = 8^{2 \cdot x - 1}$
- c) $3^{(2 \cdot x + 2)^2} \cdot 9^{x - \frac{7}{2}} = 27^{(x+2)^2}$ Aufgabe 1. (Test am 24.02.2020)
- d) $16^x - 5 \cdot 4^x + 4 = 0$
- e) $2^{x+3} - 8 \cdot 5^{x-2} = 3 \cdot 2^x$

4.2 Logarithmusgleichungen

Löse die Gleichung.

- a) $\log_2(x + 1) = 3$
- b) $\log_{42} [(7 \cdot x - 1)^2] = 3 \cdot \log_{42}(2 \cdot x + 1)$ Aufgabe 1. (Probetest)
- c) $\log_{17}(x - 1) + \log_{17}(x + 1) = \log_{17}(5 \cdot x - 7)$
- d) $[\ln(x)]^2 - 2 \cdot \ln(x) - 3 = 0$

4.3 Zwei besonders harte Nüsse

Löse die Gleichung.

- a) $30^x - 16 \cdot 15^x - \frac{1}{25} \cdot 6^x + \frac{16}{25} \cdot 3^x = 0$ Aufgabe 7.5.b) (KH Termrechnung)
- b) $\log_4(x) + \log_x(4) = \frac{10}{3}$ Aufgabe 7.4. (KH Termrechnung)

Weitere Aufgaben zu Exponential- und Logarithmusgleichungen sind im [KH Termrechnung](#) in Kapitel 7 zu finden.