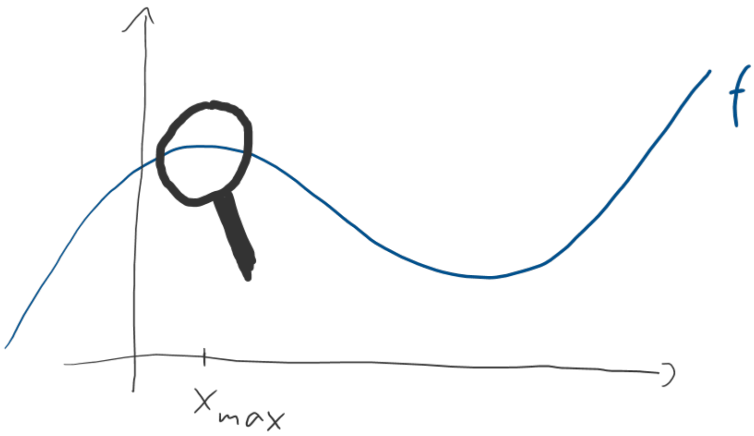
Ein Haufen Aufgaben rund um Differentialrechnung & Kurvenuntersuchung



Inhaltsverzeichnis

Erstellt von Felix Heistinger (Version vom 10. Dezember 2021)

1 Kurvenuntersuchung

1.1 Das volle Programm

Ermittle jeweils die Nullstellen und untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten sowie das asymptotische Verhalten (bzw. die Periodizität) der Funktion f.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^5 + 5 \cdot x^4$ Aufgabe 4.1.c) (AS Calculus)

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ Aufgabe 1.18.b) (AS Calculus)

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 3}$ Aufgabe 1.1.c) (AS Calculus)

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ Aufgabe 1.3.b) (AS Calculus)

f) $f :]0; \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = x \cdot \ln(1 + x) - x \cdot \ln(x)$ Aufgabe 1.19. (AS Calculus)

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4^x - 3 \cdot 2^x + 2$

h) $f :]0; \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = x^x$ Aufgabe 1.7.a) (AS Calculus)

1.2 Gezieltere Fragestellungen

a) Fortsetzung der Aufgabe 1.1 h) Aufgabe 1.7.b)-c) (AS Calculus)

i) Für welche Zahlen $y \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^x = y$ keine / genau eine / mehr als eine Lösung über der Grundmenge $\mathbb{R}^+$?

ii) Löse die Gleichung

$$x^x + 108 \cdot x^{-x} = 31$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}^+$.

b) Wie muss der Parameter $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = x^3 - 3 \cdot x + a$$

genau i) eine ii) zwei iii) drei iv) keine reellen Nullstelle(n) hat?

Begründe deine Antwort sorgfältig mithilfe des Zwischenwertsatzes.

Aufgabe 2. (Probetest)

c) Sei $k \in \mathbb{R}$ ein Parameter und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot k \cdot x.$$

i) Angenommen, $k < 0$. Ermittle das Monotonieverhalten von f.

ii) Angenommen, $k \geq 0$. Ermittle das Monotonieverhalten von f.

iii) Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$x^3 = 3 \cdot k \cdot x + 16$$

jeweils genau i) eine ii) zwei iii) drei Lösung(en) über der Grundmenge $\mathbb{R}$?

Aufgabe 3. (Test am 24.02.2020)

d) Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{(x^3+1)^4}{(x^4+1)^3}$$

um zu zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x^3+1)^4 \leq 2 \cdot (x^4+1)^3.$$

Aufgabe 4. (Probetest)

e) Zeige, dass die Gleichung

$$e^x = x$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$ keine Lösungen hat.

Aufgabe 1.21. (AS Calculus)

f) Zeige, dass für alle reellen Zahlen $x > 0$ gilt:

$$x - 1 \leq x \cdot \ln(x)$$

Aufgabe 5.e) (Test 24.02.2020)

1.3 Umgekehrte Kurvenuntersuchung

a) Eine Polynomfunktion f dritten Grades hat bei $x = -1$ eine Wendestelle. Eine Gleichung der Wendetangente ist $y + 3 \cdot x + 5 = 0$. Die Funktion hat eine Nullstelle bei $x = -2$.

Ermittle eine Gleichung von f.

Aufgabe 4.11.a) (AS Calculus)

b) f ist eine Polynomfunktion vom Grad 3. Das Monotonieverhalten von f ändert sich an den Stellen $x = -2$ und $x = 3$. Die Tangente an den Graphen hat an der Stelle $x = 0$ die Gleichung $36 \cdot x + y = 42$.

Ermittle eine Gleichung von f.

Aufgabe 1. (Test am 11.12.2020)

2 Weitere Anwendungen der Differentialrechnung

2.1 Linearisierung

Ermittle jeweils eine Gleichung der Linearisierung von f an der gegebenen Stelle x_0.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und $x_0 = 2$

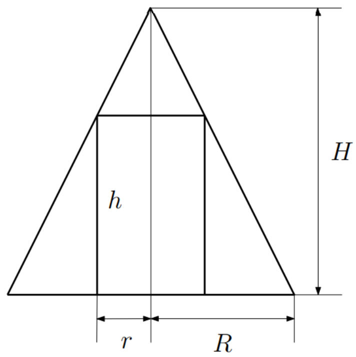
b) $f :]0; \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$ und $x_0 = 1$

Berechne nun jeweils $f(x_0 + 0,1)$ mit dem Taschenrechner und den entsprechenden Näherungswert mit der Linearisierung. Wie groß ist jeweils der absolute Fehler?

Aufgabe 1.8. (AS Calculus)

2.2 Optimierung

a) Einem Drehkegel mit Radius $R = 42\,\text{cm}$ und Höhe $H = 126\,\text{cm}$ werden Drehzylinder wie im Bild eingeschrieben. Gesucht sind die Abmessungen jenes Drehzylinders mit maximalem Volumen.



Aufgabe 4. (Test am 21.07.2020)

b) Aus einem Kreis mit Radius 1 wird ein Kreissektor geschnitten. Dieser Kreissektor ist der Mantel eines Drehkegels. Wie muss der Öffnungswinkel α des Kreissektors gewählt werden, damit das Volumen des Kegels größtmöglich ist?

Aufgabe 2.2. (AS Calculus)

c) Welche Punkte des Funktionsgraphen von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

haben vom Punkt $P = (0 \mid \frac{9}{2})$ den kleinsten Abstand?

Aufgabe 3. (Test am 19.02.2021)