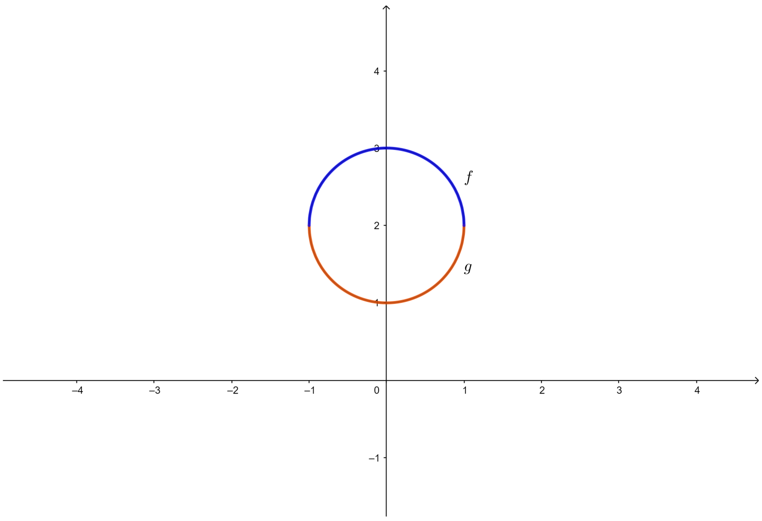
Volumen eines *Doughnuts* (AS Calculus, 4.8.)

Die Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt in $(0 \mid 2)$ rotiert um die horizontale Achse. Wie groß ist das Volumen des Doughnuts, der dadurch entsteht?

Der erste Schritt ist hier, die Situation einmal graphisch darzustellen. Es ist klar, dass es keine Funktion $K : \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{R}$ gibt, deren Graph ein Kreis ist. Was man aber hier machen kann, ist zwei Funktionen $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ finden, sodass der Kreis dann genau der Vereinigung der Graphen von f und g entspricht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten, aber die naheliegendste ist wohl, zu schauen, dass der Graph der einen Funktion genau dem oberen Kreisbogen entspricht und der Graph der anderen dem unteren Kreisbogen.



Wähle aus den folgenden Funktionsgleichungen die beiden aus, die zu dieser Situation passen.

a) $f(x) = 2 + \sqrt{1 + x^2}$

b) $f(x) = 2 + \sqrt{x^2 - 1}$

c) $f(x) = 2 + \sqrt{1 - x^2}$

d) $g(x) = 1 + \sqrt{1 + x^2}$

e) $g(x) = 2 - \sqrt{1 - x^2}$

f) $g(x) = 2 - \sqrt{x^2 - 1}$

Wenn man nun solche Funktionen f und g gefunden hat, kann sich überlegen, wie man das Volumen des Rotationskörpers berechnen kann, der entsteht, wenn die Kreisscheibe um die horizontale Achse rotiert.

Wähle den passenden Ansatz für die Berechnung des Volumen des Doughnuts (f und g wie oben).

a) $V_D = \pi \cdot \int\limits_{-1}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)^2 dx$

b) $V_D = \pi \cdot \int\limits_{-1}^{1} \big(f(x)^2 - g(x)^2\big) dx$

c) $V_D = \pi \cdot \int\limits_{-1}^{1} \big(g(x)^2 - f(x)^2\big) dx$

d) $V_D = \pi \cdot \int\limits_{-1}^{1} \big(f(x)^2 + g(x)^2\big) dx$

Nimm dir nun ein paar Minuten Zeit, um zu zeigen, dass $V_D = 4 \cdot \pi^2$.

Du darfst dabei verwenden, dass der Flächeninhalt des Einheitskreises gleich π ist.