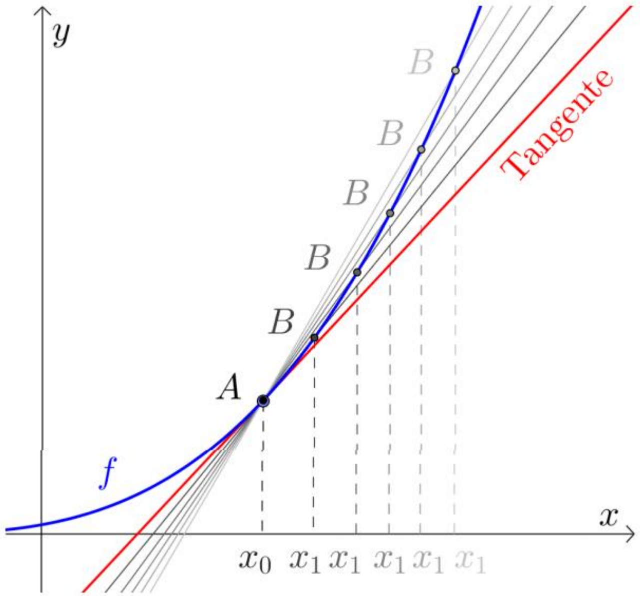
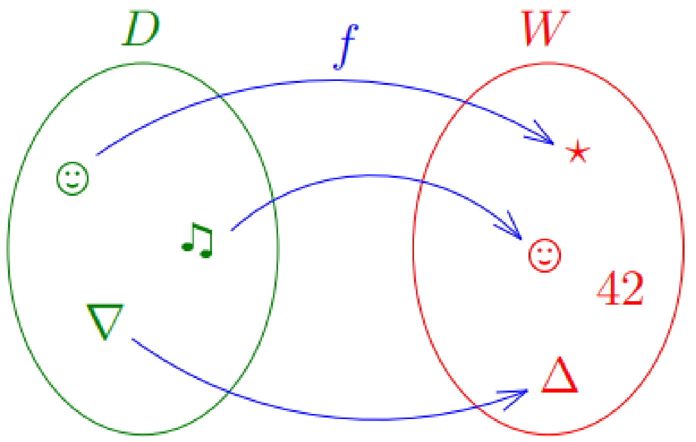
Überblick zum Thema

Wichtige Eigenschaften von Funktionen



Funktion

Eine **Funktion** $\boldsymbol{f}$ ist eine Vorschrift,
die *jedem* Element ihrer **Definitionsmenge** $\boldsymbol{D}$
genau ein Element aus ihrer **Wertemenge** $\boldsymbol{W}$ zuordnet.



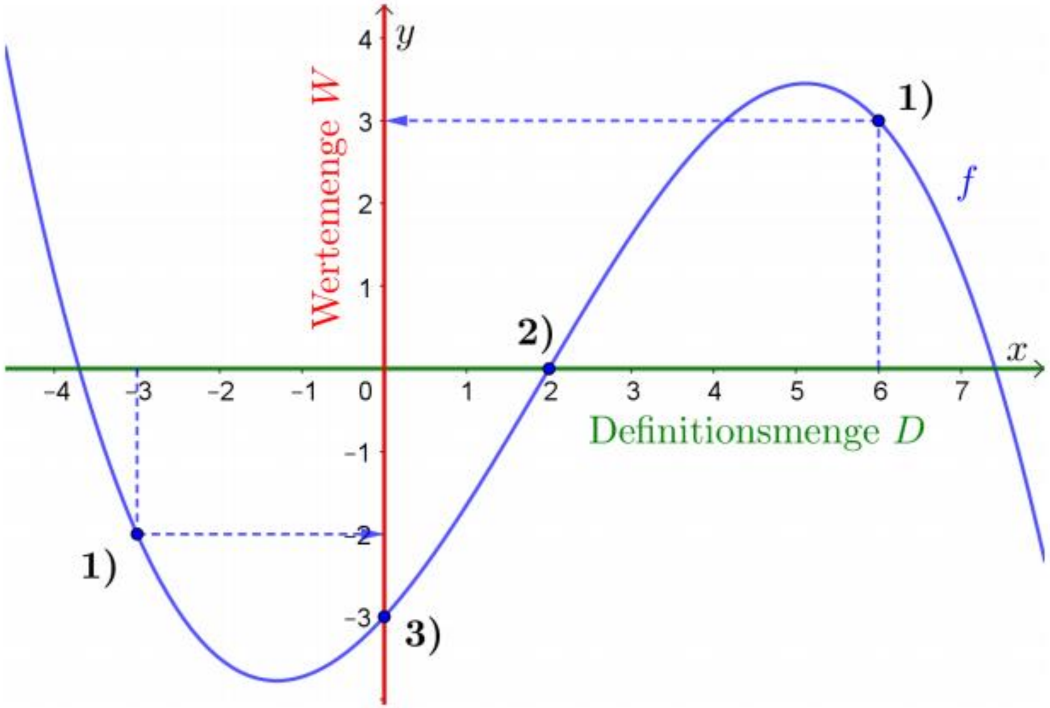
Kurz schreiben wir dafür auch: $f\colon D \to W$

Wenn f dem Element ☺ das Element $\star$ zuordnet,
schreiben wir dafür kurz $f(☺) = \star$.

$\star$ heißt dann **Funktionswert** von ☺. Sprechweise: „f von ☺ ist gleich $\star$.“

In diesem Beispiel besteht die Definitionsmenge D aus allen reellen Zahlen. Kurz: $D = \mathbb{R}$
Grafisch ist D unten durch die waagrechte Achse dargestellt.
Die Wertemenge $W = \mathbb{R}$ ist grafisch durch die senkrechte Achse dargestellt.

Die eingezeichnete Kurve heißt **Funktionsgraph**.
Der Funktionsgraph besteht genau aus allen Wertepaaren $(x \mid f(x))$.



Zum Beispiel:

1) Es gilt $f(6) = 3$ und $f(-3) = -2$.

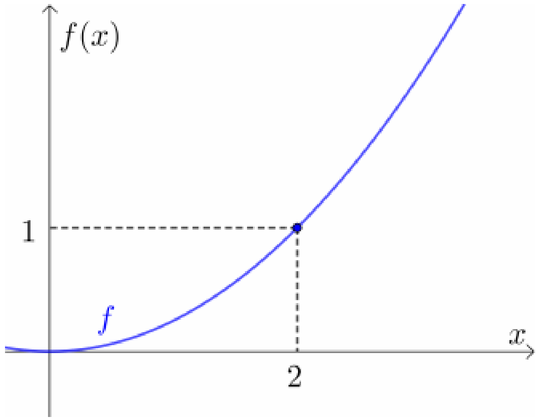
2) Der Funktionsgraph schneidet die waagrechte Achse an der Stelle $x = 2$.
Es gilt also $f(\_\_\_) = \_\_\_$.

Die Zahl 2 heißt daher auch **Nullstelle** von f.

3) Der Funktionsgraph schneidet die senkrechte Achse bei $y = -3$.
Es gilt also $f(\_\_\_) = \_\_\_$.

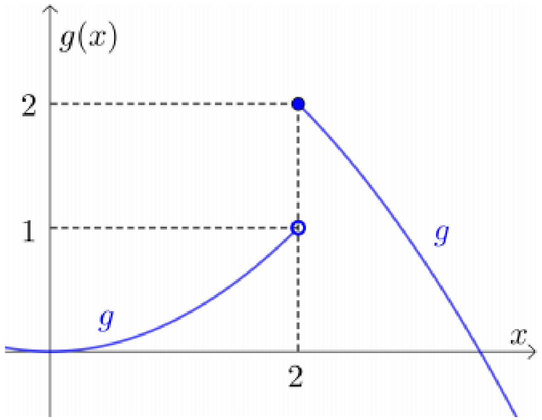
Was heißt hier stetig?

Stetigkeit: „*Kleine Veränderungen in x-Richtung bewirken kleine Veränderungen in y-Richtung.*“



Wie ändern sich die Funktionswerte von f, wenn wir uns *ein bisschen* von der Stelle $x = 2$ nach links oder nach rechts bewegen?

Wie ändern sich die Funktionswerte von g, wenn wir uns *ein bisschen* von der Stelle $x = 2$ nach links oder nach rechts bewegen?



Die **elementaren Funktionen** sind – überall dort, wo sie definiert sind – **stetig**. Dazu zählen:

1) Polynomfunktionen: $f(x) = 4 \cdot x^5 - 5 \cdot x^3 + 2 \cdot x + 42$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

2) Potenzfunktionen: $p(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3) Wurzelfunktionen: $w(x) = x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5}$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$

4) Exponentialfunktionen: $e(x) = 4^x$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

5) Logarithmusfunktionen: $\ell(x) = \log_4(x)$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$

6) Winkelfunktionen: $s(x) = \sin(x)$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

7) Arkusfunktionen: $a(x) = \arcsin(x)$ mit $D = [-1; 1]$

Sind f und g stetige Funktionen, dann ist auch

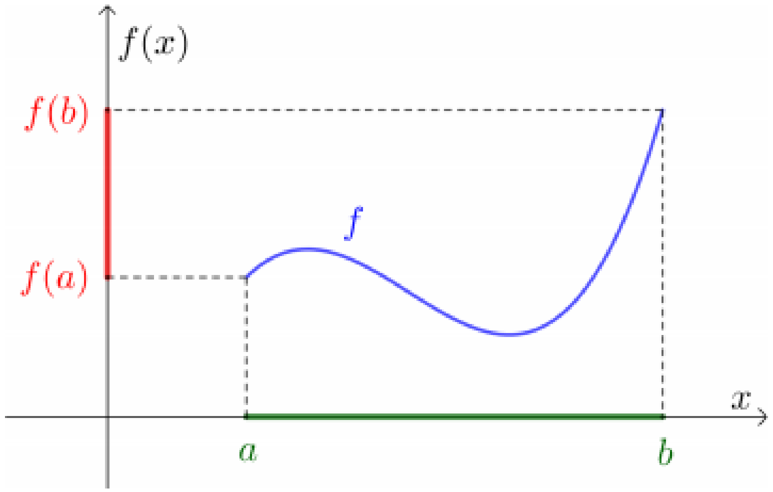
i) ihre **Summe**, **ii)** ihre **Differenz**, **iii)** ihr **Produkt**, **iv)** ihr **Quotient**, **v)** ihre **Zusammensetzung**

wieder im gesamten Definitionsbereich **stetig**.

Zwischenwertsatz:

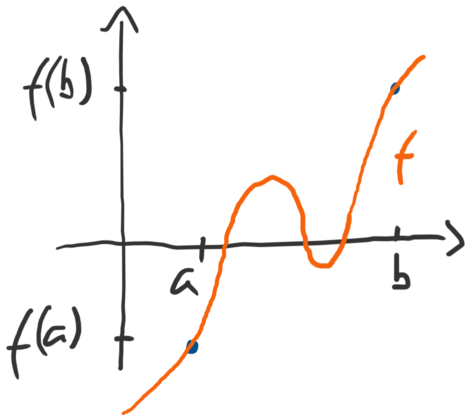
Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



Insb.: f stetig, $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$

$\Rightarrow$ f hat mind. eine Nullstelle in $[a; b]$



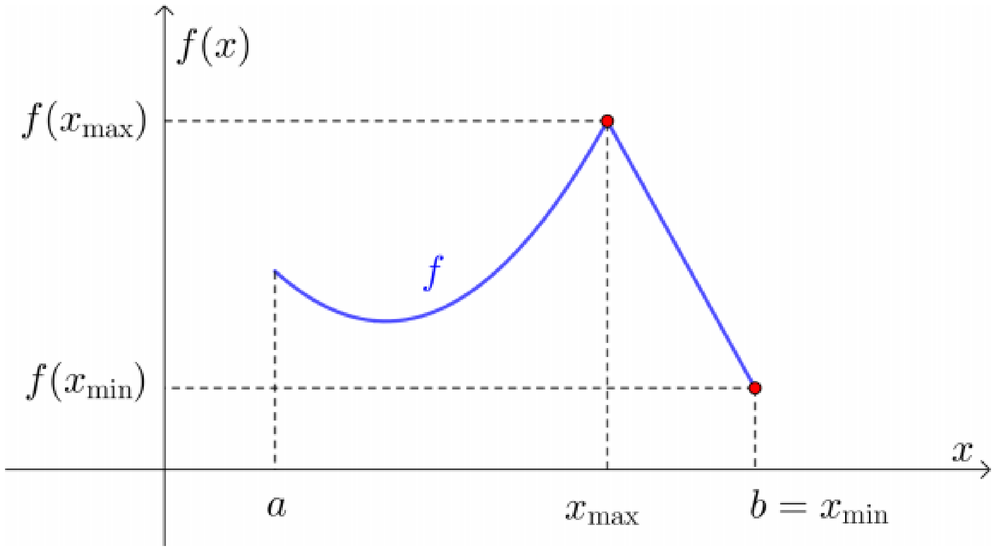
MATHEMATIK macht FREU(N)DE

Satz vom Minimum und Maximum:

Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann gibt es eine Stelle x_{min} und eine Stelle x_{max} in $[a; b]$ so, dass für alle x in $[a; b]$ gilt:

$$f(x_{\text{min}}) \leq f(x) \leq f(x_{\text{max}})$$



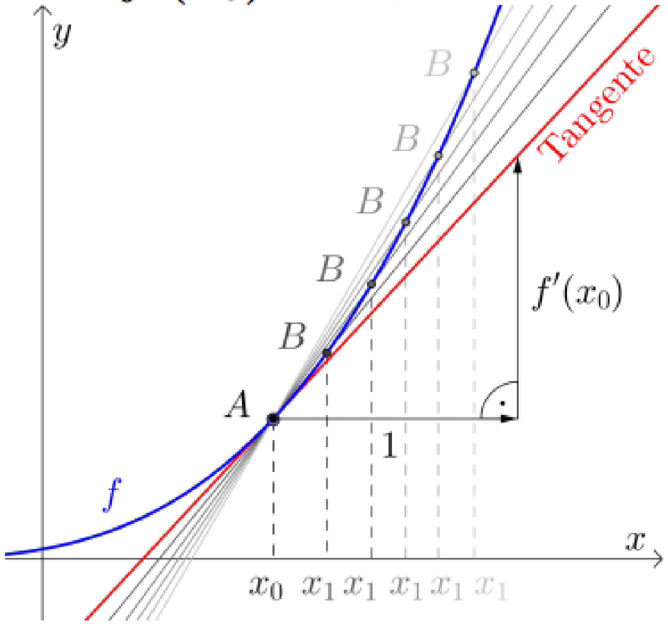
$\boldsymbol{f'(x_0)}$

Für die **Steigung der Tangente** von f an der Stelle x_0 schreiben wir kurz $\boldsymbol{f'(x_0)}$. „f strich von x_0“

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

Dieser sogenannte **Differentialquotient** misst die **lokale Änderungsrate** von f an der Stelle x_0.

Wir sagen auch: f ist **differenzierbar an der Stelle** $\boldsymbol{x_0}$.
$f'(x_0)$ ist die **Ableitung von** $\boldsymbol{f}$ **an der Stelle** $\boldsymbol{x_0}$.



Dieser Grenzwert existiert *nicht* immer. Mehr dazu erfährst du später.

AS Calculus 1.9., 1.10., 1.14.

Ableitungsfunktion

Ist eine Funktion f an *jeder* Stelle differenzierbar, können wir die **Ableitungsfunktion f'** berechnen.
Ihr Funktionswert an der Stelle x, also $f'(x)$, ist die Steigung der Tangente von f an der Stelle x.
Wir sagen auch kurz: „f' ist die Ableitung von f. Die Steigung von f an der Stelle x ist $f'(x)$.“