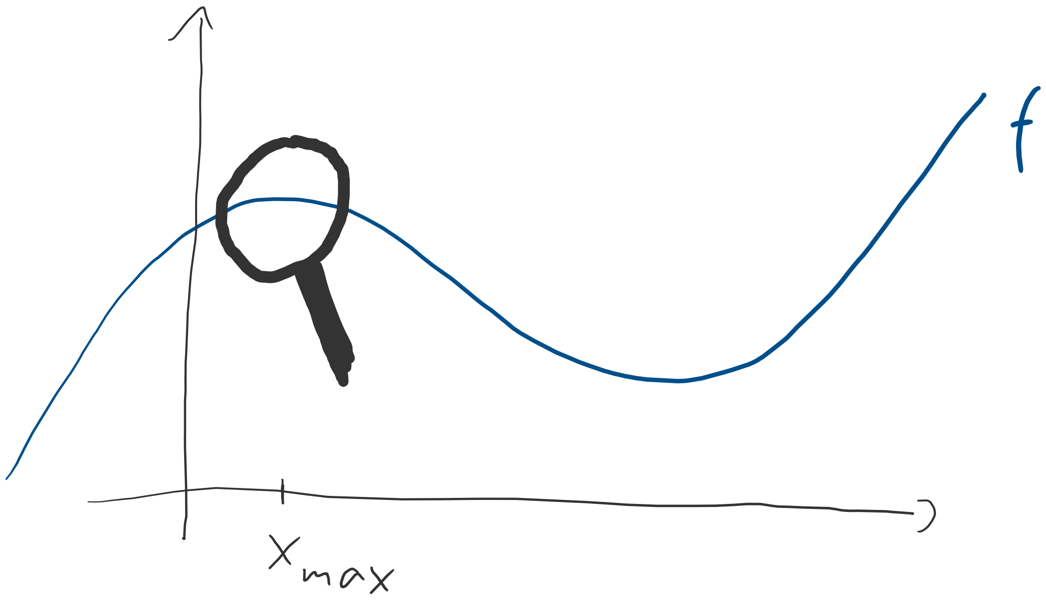
Überblick zum Thema

Kurvenuntersuchung*



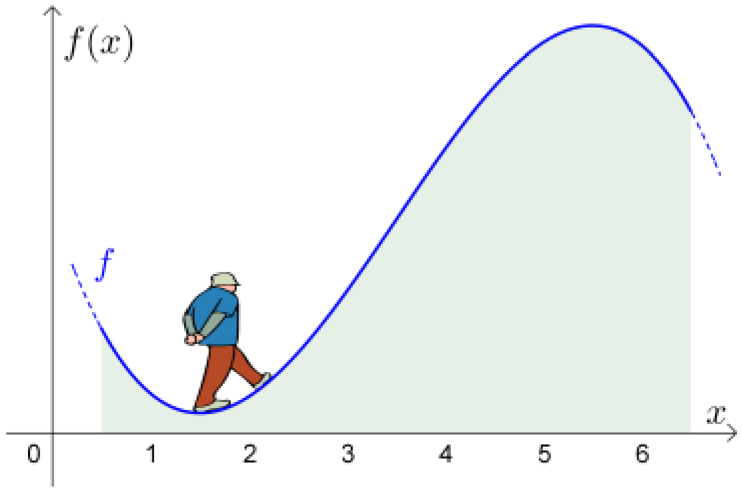
* auch *Funktionsuntersuchung* genannt, da wir damit üblicherweise das Untersuchen von Funktionsgraphen meinen

Steigungen berechnen

Der dargestellte Funktionsgraph modelliert das Profil eines Hügels:

- Wo ist der tiefste Punkt?
- Wo ist der höchste Punkt?
- Wie misst man die Steigung in einem Punkt?
- Wo geht es am steilsten bergauf?

Die Differentialrechnung gibt *exakte* Antworten auf diese Fragen.



$$f(x) = -\frac{3}{16} \cdot x^3 + \frac{63}{32} \cdot x^2 - \frac{297}{64} \cdot x + \frac{2217}{640}$$

Überblick

- Monotonieverhalten und Extremstellen
- Krümmungsverhalten und Wendestellen
- Asymptotisches Verhalten

Rechts ist der Graph einer Funktion f im Intervall $[0; 11]$ dargestellt.

f ist **streng monoton steigend** im Intervall $[0; 2]$.

Das heißt, für alle $x, y \in [0; 2]$ gilt: $x < y \implies f(x) < f(y)$

f ist **monoton steigend** im Intervall $[0; 4]$.

Das heißt, für alle $x, y \in [0; 4]$ gilt: $x < y \implies f(x) \leq f(y)$

f ist **streng monoton fallend** im Intervall $[4; 7]$.

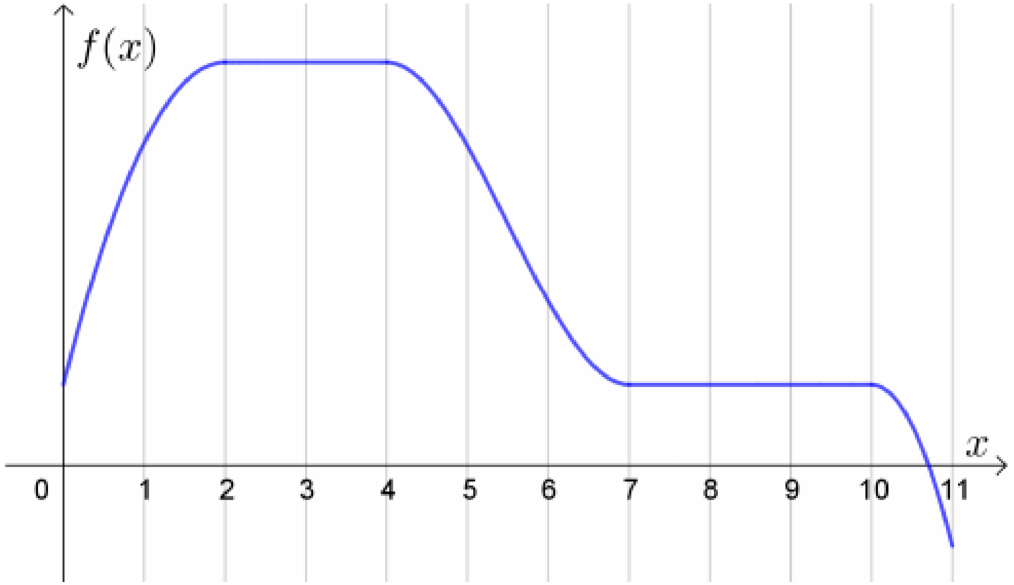
Das heißt, für alle $x, y \in [4; 7]$ gilt: $x < y \implies f(x) > f(y)$

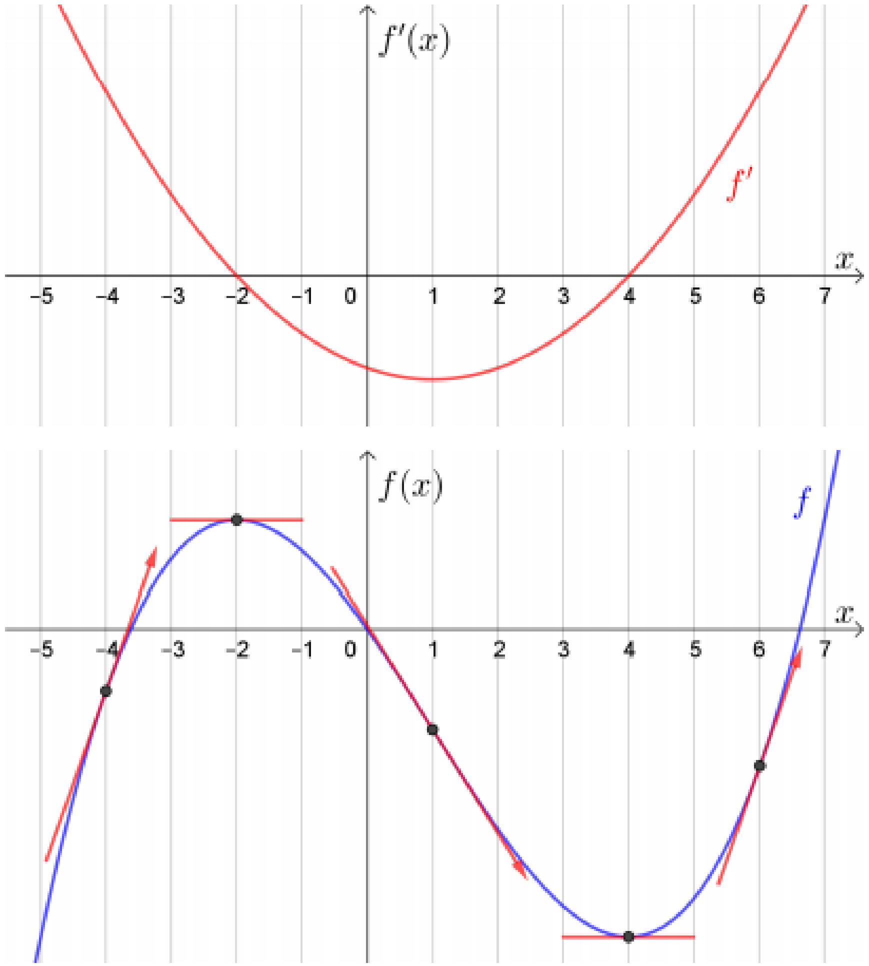
f ist **monoton fallend** im Intervall $[2; 11]$.

Das heißt, für alle $x, y \in [2; 11]$ gilt: $x < y \implies f(x) \geq f(y)$

f ist **konstant** im Intervall $[2; 4]$.

Das heißt, für alle $x, y \in [2; 4]$ gilt: $f(x) = f(y)$





Für jede differenzierbare Funktion f gilt:

- Ist $f'(x) > 0$ für alle Stellen x eines Intervalls, so ist f streng monoton steigend in diesem Intervall.
- Ist $f'(x) < 0$ für alle Stellen x eines Intervalls, so ist f streng monoton fallend in diesem Intervall.

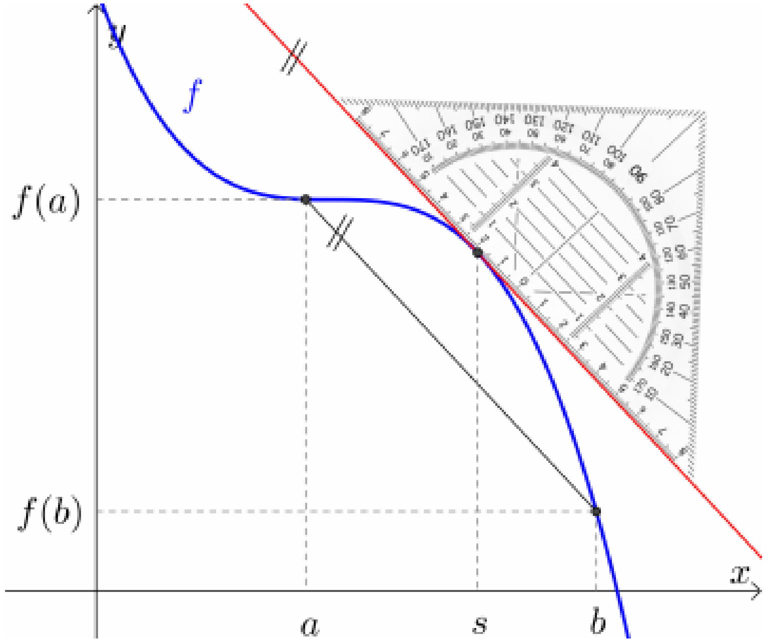
Das und mehr folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion,
die auf $]a; b[$ differenzierbar ist.

Dann gibt es eine Stelle s in $]a; b[$, sodass:

$$f'(s) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Da geht noch mehr...

MATHEMATIK macht FREU(N)DE

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ in $[a;b]$ stetig und in $]a;b[$ diff-bar. $([a;b] \subseteq I \subseteq \mathbb{R})$

Dann folgt aus dem MWS der Differentialrechnung:

(1) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a;b[\iff f$ monoton fallend in $[a;b]$

(2) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a;b[\iff f$ monoton steigend in $[a;b]$

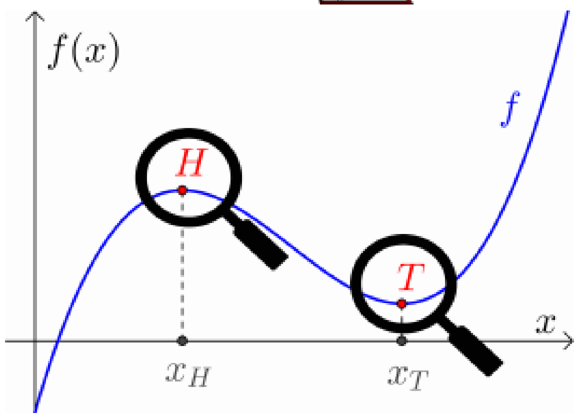
(3) $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a;b[\iff f$ konstant in $[a;b]$

(4) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]a;b[\implies f$ streng monoton fallend in $[a;b]$

(5) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a;b[\implies f$ streng monoton steigend in $[a;b]$

Am Graphen der rechts dargestellten Funktion f sind ein **Hochpunkt H** und ein **Tiefpunkt T** eingezeichnet.

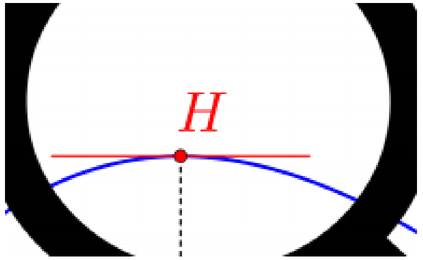
Solche Punkte werden auch **Extrempunkte** genannt. Die zugehörigen Stellen x_H und x_T sind **Extremstellen**.



In einem Hochpunkt ist der Funktionswert *lokal* am größten. Es gilt also

$$f(x_H) \geq f(x)$$

für alle x im Definitionsbereich nahe um x_H. Blicken wir nahe genug auf den Hochpunkt, dann sehen wir *keine* größeren Funktionswerte:

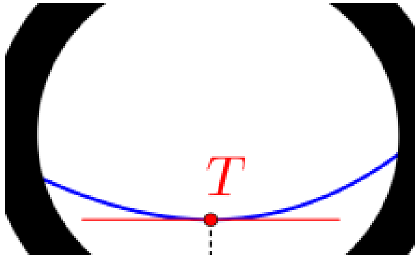


H heißt deshalb auch **lokales Maximum**.

In einem Tiefpunkt ist der Funktionswert *lokal* am kleinsten. Es gilt also

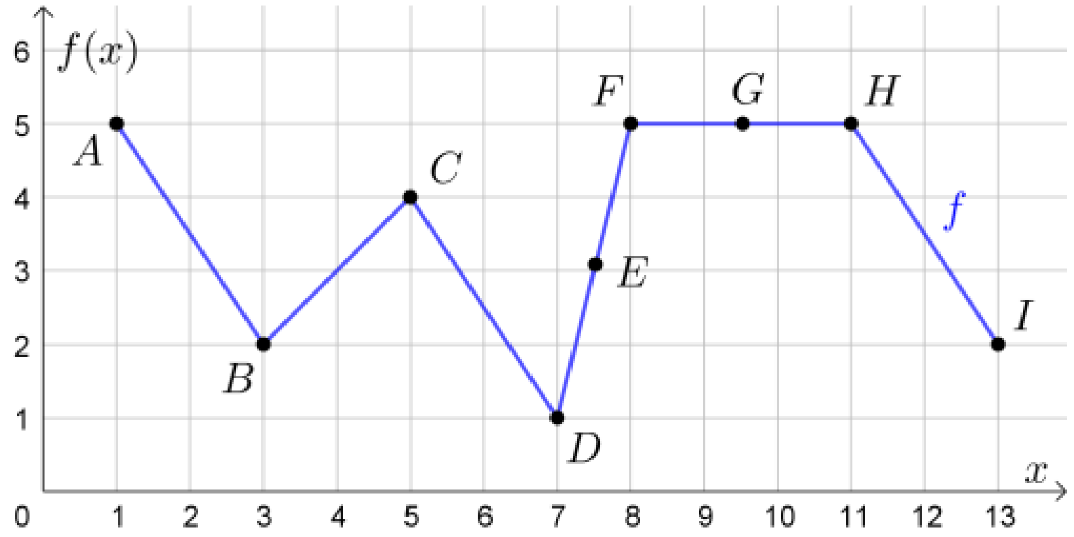
$$f(x_T) \leq f(x)$$

für alle x im Definitionsbereich nahe um x_T. Blicken wir nahe genug auf den Tiefpunkt dann sehen wir *keine* kleineren Funktionswerte:



T heißt deshalb auch **lokales Minimum**.

Die dargestellte stückweise lineare Funktion f ist im Intervall $[1; 13]$ definiert:



f ist an jeder Stelle im Intervall $[1; 13]$ stetig.
f ist an den *Knickstellen nicht* differenzierbar.

Was soll sonst *die* Tangente im Punkt B sein?

Kreuze rechts an.

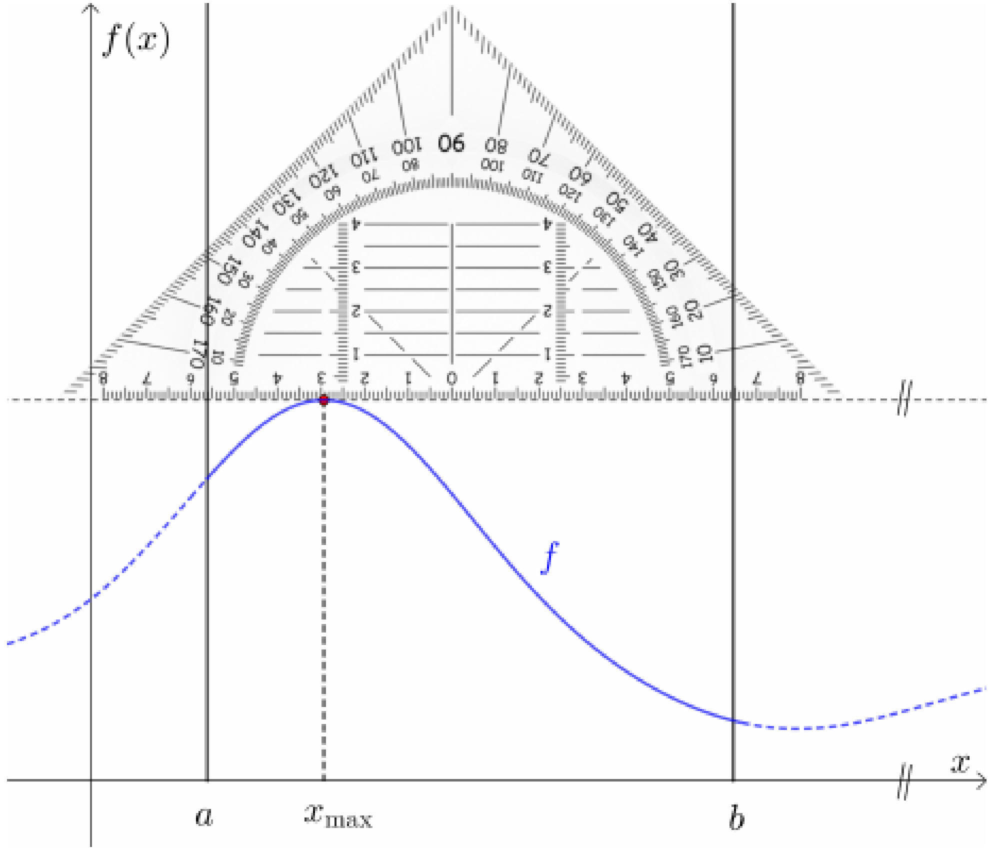
	Hochpunkt	Tiefpunkt
A	ja ☐ nein ☐	ja ☐ nein ☐
B	ja ☐ nein ☐	ja ☐ nein ☐
C	ja ☐ nein ☐	ja ☐ nein ☐
D	ja ☐ nein ☐	ja ☐ nein ☐
E	ja ☐ nein ☐	ja ☐ nein ☐
F	ja ☐ nein ☐	ja ☐ nein ☐
G	ja ☐ nein ☐	ja ☐ nein ☐
H	ja ☐ nein ☐	ja ☐ nein ☐
I	ja ☐ nein ☐	ja ☐ nein ☐

1. Ableitungstest (first derivative test):

Sei $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und x_0 in $]a;b[$.

Wenn x_0 eine Extremstelle ist, dann gilt:

$$f'(x_0) = 0$$



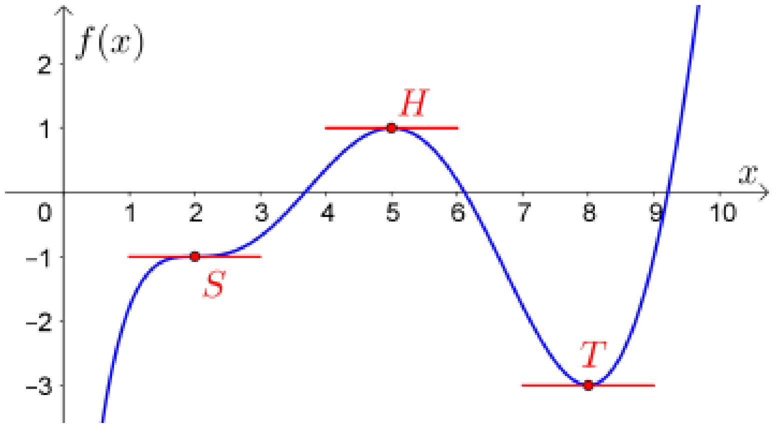
Wenn x_0 eine Extremstelle einer differenzierbaren Funktion f ist, dann gilt $f'(x_0) = 0$.
Die waagrechten Tangenten im Hochpunkt H und im Tiefpunkt T sind im Bild unten angedeutet.

Aus $f'(x_0) = 0$ folgt noch *nicht*, dass x_0 eine Extremstelle ist:

Im Beispiel rechts gilt $f'(2) = 0$. Der Punkt $S = (2 \mid -1)$ ist aber weder ein Hochpunkt noch ein Tiefpunkt.

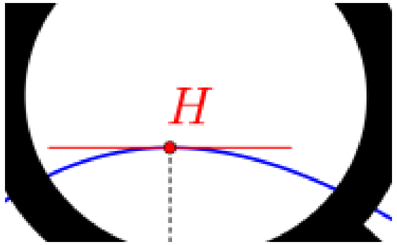
Einen solchen Punkt nennt man **Sattelpunkt**.
Die zugehörige Stelle nennt man **Sattelstelle**.

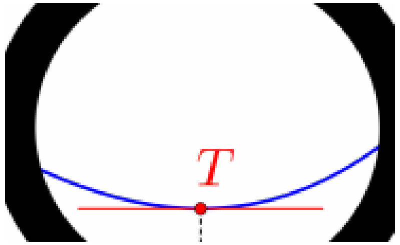
Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt und x_0 *keine* Extremstelle ist, dann ist x_0 eine Sattelstelle.



Vorzeichenwechsel von f' $\Longrightarrow$ Extremstelle von f

Wenn f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von $+$ auf $-$ wechselt,
dann ändert f das Monotonieverhalten von $\nearrow$ auf $\searrow$.
f hat also an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.





Wenn f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von $-$ auf $+$ wechselt,
dann ändert f das Monotonieverhalten von $\searrow$ auf $\nearrow$.
f hat also an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

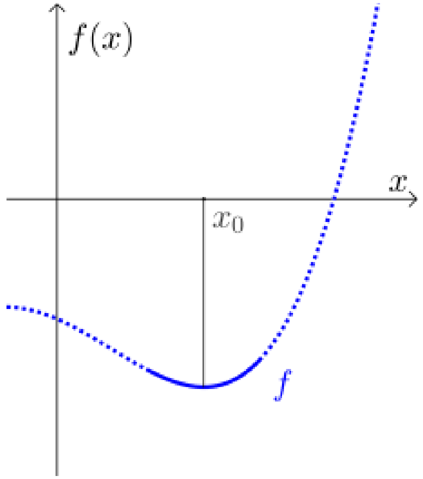
Beobachtung: Sei g diff-bar und $g(x_0)=0$.

$g'(x_0) > 0 \Rightarrow g$ wechselt Vorzeichen von $-$ auf $+$

$g'(x_0) < 0 \Rightarrow g$ wechselt Vorzeichen von $+$ auf $-$

g $\quad g'(x_0)>0$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen



Im Bild links gilt $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ und $\boldsymbol{f''(x_0) > 0}$.

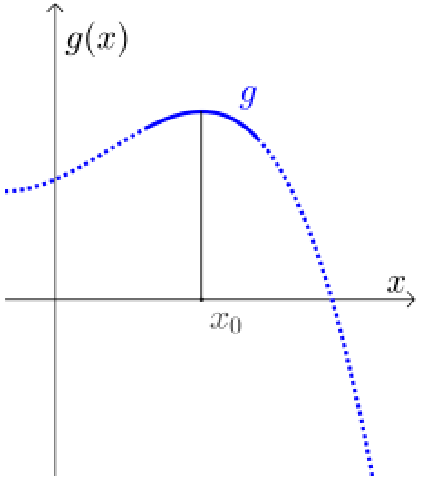
Dann ändert f' das Vorzeichen von $-$ auf $+$.

Also hat $\boldsymbol{f}$ an der Stelle $\boldsymbol{x_0}$ ein lokales __________ .

Im Bild rechts gilt $\boldsymbol{g'(x_0) = 0}$ und $\boldsymbol{g''(x_0) < 0}$.

Dann ändert g' das Vorzeichen von $+$ auf $-$.

Also hat $\boldsymbol{g}$ an der Stelle $\boldsymbol{x_0}$ ein lokales __________ .

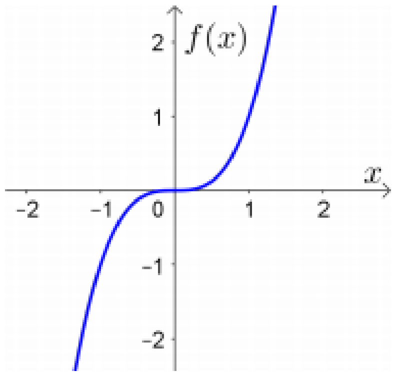


Hinreichend, aber nicht notwendig

Für eine Funktion f gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$. Folgt daraus, dass f an der Stelle x_0 …

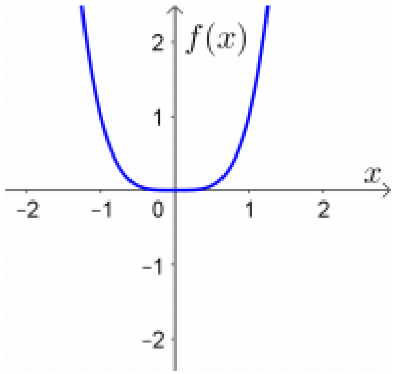
…einen Sattelpunkt hat?

1) $f(x) = x^3$



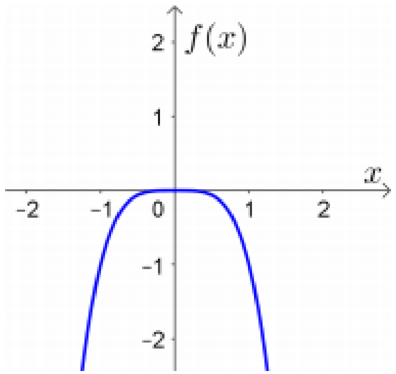
…ein lokales Minimum hat?

2) $f(x) = x^4$



…ein lokales Maximum hat?

3) $f(x) = -x^4$



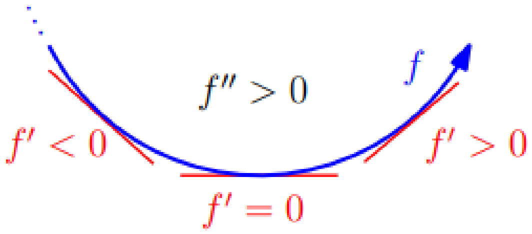
Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

Am Beispiel $f(x) = x^4$ sehen wir allerdings, dass f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum haben kann, obwohl $f''(x_0) = 0$ gilt.

Wenn $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ gilt, dann kann f dort einen Sattelpunkt, ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum haben.

Mit Hilfe der zweiten Ableitung f'' können wir das **Krümmungsverhalten** von f untersuchen.

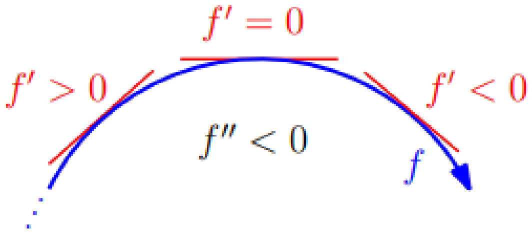
1) Ist $f''(x) > 0$ für alle Stellen x eines Intervalls, so ist f' streng monoton steigend in diesem Intervall. Die Steigung von f wird in diesem Intervall also immer größer. Wir sagen auch:



Der Graph von f ist **positiv gekrümmt**.
Der Graph von f ist **linksgekrümmt**.

Ist der Graph eine Straße in Vogelperspektive, dann fahren wir eine Linkskurve.

2) Ist $f''(x) < 0$ für alle Stellen x eines Intervalls, so ist f' streng monoton fallend in diesem Intervall. Die Steigung von f wird in diesem Intervall also immer kleiner. Wir sagen auch:

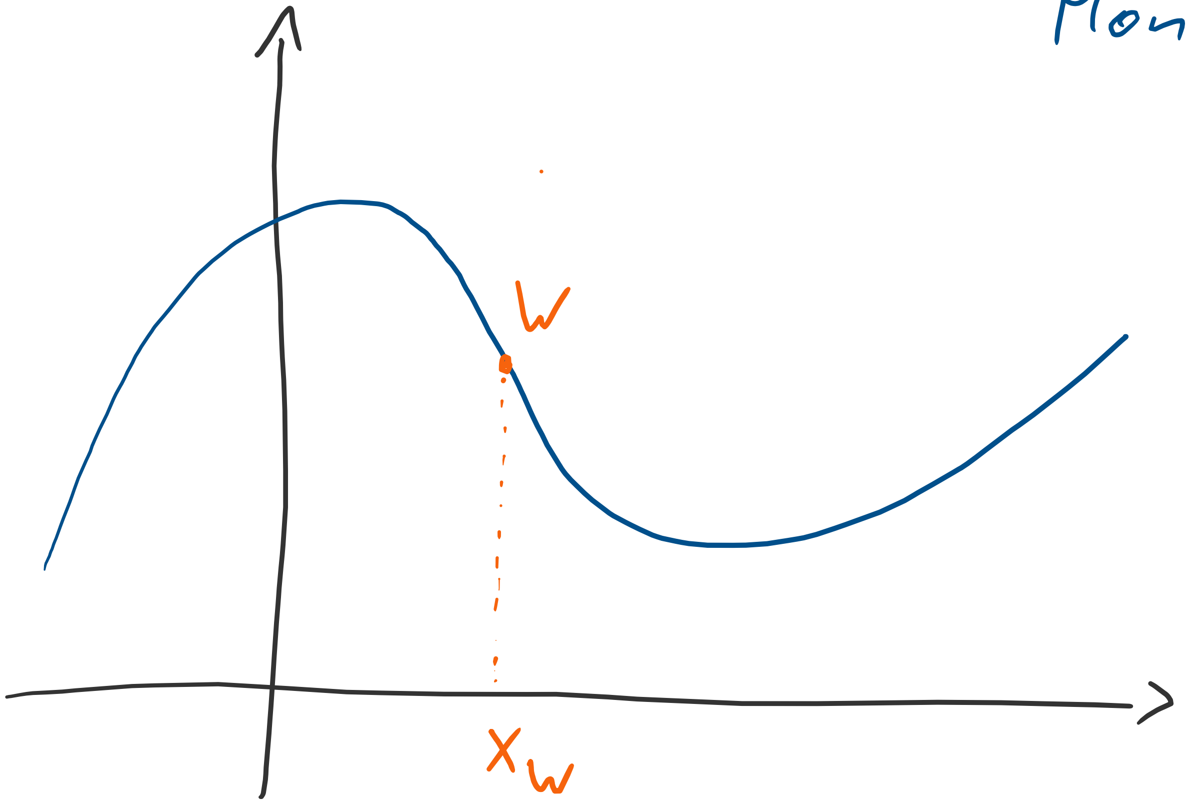


Der Graph von f ist **negativ gekrümmt**.
Der Graph von f ist **rechtsgekrümmt**.

Ist der Graph eine Straße in Vogelperspektive, dann fahren wir eine Rechtskurve.

Wendestellen

x_w ist Wendestelle von f $:\Leftrightarrow$ bei x_w ändert sich das Monotonieverhalten von f'



Wendestellen

x_w ist Wendestelle von f :⇔ bei x_w ändert sich das Monotonieverhalten von f'

⇒ Wendestellen sind Extremstellen der ersten Ableitung. Insb. gilt also

$$x_w \text{ ist Wendestelle von } f \Rightarrow f''(x_w) = 0$$

⇒ Um Wendestellen zu finden, eignen sich unsere Methoden fürs Finden von Extremstellen sehr gut/perfekt. Wir müssen sie halt einfach auf die erste Ableitung anwenden.

Bemerkung zum Begriff „Krümmung"

Krümmung beschreibt die lokale Abweichung einer Kurve von einer Gerade. Für den Graphen einer (zweimal diff-baren) Funktion f lässt sich die Krümmung an der Stelle x berechnen durch

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\left(1+(f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

„$f''(x)$ ist die Krümmung von f an der Stelle x"

↳ verlockend, aber i.A. falsch

Aber: Vorzeichen von κ und f'' stimmen immer überein.

Asymptotisches Verhalten

Gemeint ist das Verhalten einer Funktion „am Rand" bzw. „im Unendlichen".

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann betrachten wir $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

(2) $g:]a;\infty[\to \mathbb{R}$, dann betrachten wir $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ und $\lim\limits_{x \searrow a} g(x)$ (bzw. $\lim\limits_{x \to a^+} g(x)$)

(3) $h:]a;b[\to \mathbb{R}$, dann betrachten wir $\lim\limits_{x \nearrow b} h(x)$ und $\lim\limits_{x \searrow a} h(x)$