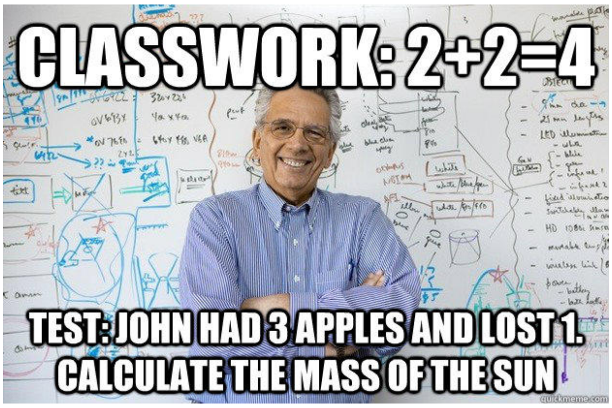
Quer durch den Gemüsegarten...

Testvorbereitung



Damit uns das nicht passiert, habe ich hier eine Sammlung von Aufgaben erstellt, die zur gezielten Testvorbereitung dienen soll. Dabei habe ich mich einerseits an den ehemaligen **Testaufgaben** orientiert und andererseits natürlich an den zentralen Inhalten des **KH Termrechnung** und der **AS Calculus**.

Bis auf Abschnitt **1.5.** knüpfen alle Abschnitte unmittelbar ans Tutorium an bzw. greifen wichtige Aufgaben und Tricks auf, die dort bereits besprochen wurden. In **1.5.** werden lineare und nichtlineare Gleichungssysteme behandelt. Da dies im Tutorium bisher wenig besprochen wurde, ist dieser Abschnitt hier verhältnismäßig lang.

Inhaltsverzeichnis

1 Termrechnen und Gleichungen

1.1 Quadratische Terme und Gleichungen

1. Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ hat die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2 \cdot k \cdot x - (10 \cdot k + 9) = 0$$

genau eine reelle Lösung?

Aufgabe 4.3.a) (KH Termrechnung)

2. Zeige, dass die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Für welche Werte von x gilt Gleichheit?
Tipp: Ergänze quadratisch.

$$x^2 + 15 \geq 6 \cdot (x + 1)$$

3. Zerlege in Linearfaktoren.

$$x^2 - 6 \cdot x - 91$$

Aufgabe 9.7.a) (KH Termrechnung)

4. Ermittle Extremstelle und Extremwert der quadratischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = -3 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 14$$

Zusatz: Wie viele Nullstellen besitzt f?

1.2 Polynome und Polynomgleichungen höheren Grades

1. Löse die gegebene Polynomgleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$3 \cdot (x + 3)^4 + 15 \cdot (x + 3)^2 - 108 = 0$$

Aufgabe 5.1.c) (KH Termrechnung)

2. Löse die gegebene Polynomgleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$x^2 \cdot (x^2 + 2 \cdot x - 3) \cdot (x^2 - 4) - 16 \cdot (x^2 + 2 \cdot x - 3) \cdot (x^2 - 4) = 0$$

3. Zerlege das Polynom in Linearfaktoren.

$$6 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 10$$

Aufgabe 2. (Test am 24.2.2020)

Zusatz: Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $6 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 10 \leq 0$?

1.3 Wurzelgleichungen

1. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$6 - \sqrt{1 + 3 \cdot x} = 11$$

Aufgabe 6.1.c) (KH Termrechnung)

2. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 4} = \sqrt{2 \cdot x - 2}$$

Aufgabe 6.4.c) (KH Termrechnung)

3. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{2 \cdot x - 5} - \frac{25}{\sqrt{2 \cdot x - 5}} + 24 = 0$$

Aufgabe 6.4.b) (KH Termrechnung)

1.4 Exponential-und Logarithmusgleichungen

1. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$\frac{4^{2 \cdot x^2 + 5 \cdot x}}{2^{2 \cdot x + 9}} = 8^{x^2 + 2 \cdot x - 2}$$

Aufgabe 1. (Test am 21.7.2020)

2. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$2^{x+3} - 8 \cdot 5^{x-2} = 3 \cdot 2^x$$

3. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$\ln[(9 \cdot x + 8)^2] = 3 \cdot \ln(3 \cdot x + 4)$$

Aufgabe 7.3.c) (KH Termrechnung)

4. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$\lg^3(2 \cdot x + 16) - 4 \cdot \lg(2 \cdot x + 16) = 0$$

Aufgabe 7.5.a) (KH Termrechnung)

1.5 Gleichungssysteme

1. Für welche reellen Werte von a und b hat das gegebene Gleichungssystem
   a) keine Lösung?
   b) genau eine Lösung?
   c) unendlich viele Lösungen?

$$\begin{cases} 12 \cdot x - b \cdot y & = 3 \\ a \cdot x - 4 \cdot y & = 2 \end{cases}$$

Aufgabe 8.3.d) (KH Termrechnung)

2. Löse das gegebene Gleichungssystem.

$$\begin{cases} \frac{x+3}{y-3} = 1 \\ \frac{y+2}{z-2} = 2 \\ \frac{z+1}{x-1} = 3 \end{cases}$$

Aufgabe 8.4.d) (KH Termrechnung)

3. Löse das gegebene Gleichungssystem.

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 21 \\ x + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 15 \\ x + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 12 \end{cases}$$

Aufgabe 8.4.c) (KH Termrechnung)

4. Löse das gegebene Gleichungssystem.

$$\begin{cases} 2 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 = 308 \\ x - 3 \cdot y^2 = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 9.11.e) (KH Termrechnung)

5. Löse das gegebene Gleichungssystem.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2 \cdot x + 4 \cdot y - 80 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12 \cdot x - 24 \cdot y + 130 = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 9.11.c) (KH Termrechnung)

6. Die Gerade g und die Ellipse e schneiden einander in 2 Punkten.

$$g: \ 2 \cdot x - 3 \cdot y = 2 \qquad e: \ 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 4 \cdot y^2 = 40$$

   Berechne die Entfernung zwischen den beiden Schnittpunkten.

Aufgabe 4. (Test am 11.12.2020)

2 Differential- und Integralrechnung

2.1 Differentialrechnung

1. Wie viele reelle Lösungen besitzt die folgende Gleichung?

$$x^5 + 13 \cdot x^3 + 31 \cdot x + 42 = 0$$

2. Zeige, dass die Gleichung

$$\sin(x) = x$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$ genau eine Lösung hat.

Aufgabe 1.23. (AS Calculus)

3. Ermittle, für welche Werte von $k \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung

$$e^x = k \cdot x$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$ a) keine Lösung b) genau eine Lösung c) mehrere Lösungen hat?

Aufgabe 1.22. (AS Calculus)

4. Wie muss der Parameter $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Polynomfunktion p mit

$$p(x) = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + a$$

genau a) eine b) zwei c) drei reelle Nullstelle(n) hat?

Aufgabe 1.26. (AS Calculus)

5. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x + 4 \cdot \sin(x)$$

Ermittle die Nullstellen von f.

Aufgabe 1.17. (AS Calculus)

6. Die Funktion g mit

$$g(x) = \ln(-x^2 + 3 \cdot x + 10)$$

ist *nicht* für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

a) Ermittle die größtmögliche Definitionsmenge von g.

b) Ermittle das Monotonieverhalten von g.

c) Ermittle das Krümmungsverhalten von g.

Aufgabe 2. (Test am 11.12.2020)

7. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

a) Zeige, dass $f'(x) = x \cdot (2 - x) \cdot e^{-x}$ gilt.
Dokumentiere dabei die Verwendung der Ableitungsregeln sorgfältig.

b) Ermittle die Nullstellen der Funktion f'.

c) Diskutiere das Monotonieverhalten der Funktion f.

d) Zeige, dass es Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot e^{-x}$$

eine Stammfunktion von f ist. Welche Werte müssen diese Zahlen a, b und c dabei haben?

e) Begründe sorgfältig, dass die Gleichung

$$x^2 = \frac{1}{2} \cdot e^x$$

genau drei Lösungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$ hat.

Aufgabe 5. (Test am 21.7.2020)

8. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$$

a) Ermittle die Nullstellen und untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten sowie das asymptotische Verhalten von f.

Aufgabe 1.1.c) (AS Calculus)

b) Argumentiere sauber (mit den Ergebnissen aus i)), warum für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$6 \cdot f(x) \leq \sqrt{3}$$

c) Zeige, dass die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 3)$$

eine Stammfunktion von f ist.

d) Zeige ohne Hilfe der Differentialrechnung, dass die Ungleichung aus ii) für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

9. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(2 \cdot x) - 2 \cdot \sin(x)$$

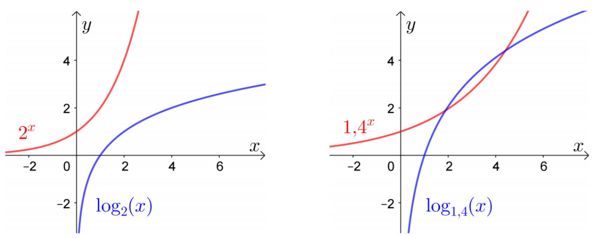
Ermittle die Nullstellen und untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten sowie die Periodizität von f.

Aufgabe 1.18. (AS Calculus)

10. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$. Die Graphen der beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x \quad \text{und} \quad g :]0; \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = \log_a(x)$$

sind jeweils für $a = 2$ und $a = 1,4$ dargestellt.



a) Begründe, warum Schnittpunkte der beiden Graphen (wenn es sie gibt) sicher auf der Gerade $y = x$ liegen müssen.

b) Begründe, warum sowohl der Graph von f als auch der Graph von g die Gerade $y = x$ höchstens zweimal schneiden können.

c) In welcher Beziehung stehen die Graphen von f und g mit der Gerade $y = x$, wenn sich die beiden Funktionsgraphen nur in einem Punkt schneiden?

d) Erkläre nun anschaulich und mit Hilfe der ersten beiden Ableitungen von f, warum es nur einen Wert von a gibt, für den die beiden Graphen genau einen Schnittpunkt haben.

Es reicht tatsächlich, für diese Überlegung nur eine der beiden Funktionen zu betrachten. Warum?

e) Für welchen Wert von a haben die beiden Graphen nur einen Schnittpunkt? Gib die Koordinaten dieses Schnittpunktes an.

Aufgabe 1.20. (AS Calculus)

11. Gegeben ist die Polynomfunktion p. Wir bilden die Funktion f mit

$$f(x) = p(x) \cdot e^{-x^2}.$$

Zeige, dass es ein Polynom q gibt, für das gilt:

$$f'(x) = q(x) \cdot e^{-x^2}$$

Was ist der Zusammenhang zwischen den Polynomen p und q?

Aufgabe 1.13. (AS Calculus)

Zusatz: Wenn p eine Polynomfunktion n-ten Grades ist, welchen Grad hat dann q?

12. Ermittle eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f : [0; \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{x}$$

im Punkt $(4 \mid f(4))$.

Aufgabe 1.8.b) (AS Calculus)

13. Zeige, dass für alle reellen Zahlen $x > 0$ gilt:

$$x - 1 \leq x \cdot \ln(x)$$

Aufgabe 5.e) (Test am 24.2.2020)

14. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion so, dass $f'(0) = 0$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt. Beweise mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung und sorgfältig dokumentierten Fallunterscheidungen, dass f *streng* monoton fallend ist.

Aufgabe 5. (Test am 18.12.2019)

2.2 Optimierungsaufgaben

1. Wir betrachten Dreiecke deren Umkreis Radius 1 hat.
Was ist der größte Flächeninhalt, den ein solches Dreieck haben kann?

Aufgabe 2.3. (AS Calculus)

2. Wir rollen ein Rechteck mit Umfang $U > 0$ zu einem Drehzylinder zusammen. Wie muss das Rechteck dimensioniert sein, damit der Drehzylinder das größte mögliche Volumen hat?

Aufgabe 2.9. (AS Calculus)

3. Welche Punkte des Funktionsgraphen von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, f(x) = x^2$$

haben vom Punkt $P = (0 \mid \frac{9}{2})$ den kleinsten Abstand?

Aufgabe 3. (Test am 19.02.2021)

2.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

1. Für welchen Wert von $x \in [0; \infty[$ ist der gegebene Ausdruck am größten?

$$\int_x^{2\cdot x} t \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 3.1.d) (AS Calculus)

2. Berechne die Ableitungsfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \int_1^{e^x} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y$$

Aufgabe 3.2.a) (AS Calculus)

3. Zeige, dass die Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert und ermittle ihren Grenzwert. Sei $\varepsilon > 0$. Gib einen Index $n(\varepsilon)$ an, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n(\varepsilon)$.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \qquad \text{wobei } \alpha > -1$$

Aufgabe 3.5.f) (AS Calculus)

2.4 Integralrechnung

1. Sei $a > 0$. Eine quadratische Funktion f hat den Scheitelpunkt $(0 \mid \frac{1}{a})$. Die Nullstellen von f sind $-a$ und a.
   Die horizontale Achse schließt mit dem Funktionsgraphen im Intervall $[-a; a]$ ein Flächenstück ein. Zeige, dass der Flächeninhalt dieses Flächenstücks nicht vom Wert von a abhängt.

Aufgabe 3. (Probetest)

2. Berechne die Bogenlänge des Graphen der Funktion f.

$$f : [-\ln 2; \ln 2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Aufgabe 4.6.d) (AS Calculus)

3. Leite mit Hilfe der Integralrechnung die Formel

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

für das Volumen einer Kugel mit Radius r her. Tipp: Rotation eines passenden Halbkreises

Nun kannst du die Masse der Sonne näherungsweise berechnen.* 😃

* $r_{Sonne} \approx 696340\,\mathrm{km}$, $\rho_{Sonne} \approx 1,4\,\mathrm{g/cm^3}$

2.5 Gemischte Aufgaben

1. Es gibt eine quadratische Funktion f mit den folgenden beiden Eigenschaften:

   i) $2 \cdot x - y = -6$ ist eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$

   ii) $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$

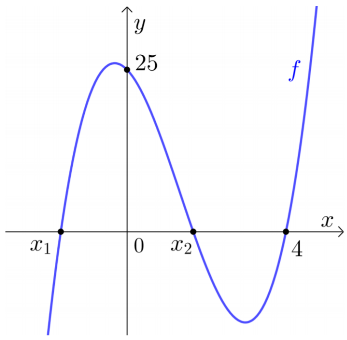
   Ermittle die Gleichung von f.

   Aufgabe 3. (Test am 21.7.2020)

2. Die dargestellte Polynomfunktion f hat Grad 3. Die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen sind unten eingezeichnet. Die Nullstellen x_1 und x_2 liegen symmetrisch zum Koordinatenursprung. Weiters gilt:

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$$

   Berechne die Nullstellen x_1 und x_2.



   Aufgabe 5. (Test am 19.02.2021)

3. Ermittle die Nullstellen und untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten sowie, das asymptotische Verhalten der Funktion f mit

$$f :]0;\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = [\ln(x)]^2 - 3 \cdot \ln(x) + 2$$

   Skizziere den Graphen von f und berechne den Flächeninhalt des endlichen Bereichs, der von diesem Graphen und der horizontalen Achse berandet wird.

   Tipp: Um eine Stammfunktion zu ermitteln, bilde zuerst die Ableitungen von $x \cdot [\ln(x)]^2$ und $x \cdot \ln(x)$.

   Aufgabe 4.5. (AS Calculus)

4. Eine Polynomfunktion f dritten Grades hat bei $x = 2$ eine Wendestelle. Eine Gleichung der Wendetangente ist $9 \cdot y + 3 \cdot x = 8$. Die Tangente an den Graphen der Funktion an der Stelle $x = 0$ schließt mit der positiven x-Achse einen Winkel von 45° ein. Diese Tangente berandet mit dem Graphen von f einen endlichen Bereich. Was ist sein Flächeninhalt?

   Aufgabe 4.12. (AS Calculus)