

Name: _____

Matrikelnummer: _____

1. HINWEISE

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
- Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

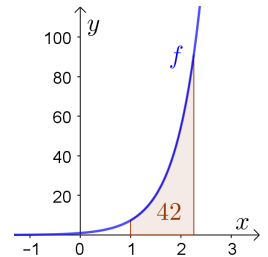
2. AUFGABEN

Aufgabe 1. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{2 \cdot x}$ ist rechts dargestellt.

- a) Ermittle eine Stammfunktion F von f .
- b) Berechne $b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\int_1^b f(x) \, dx = 42$$

gilt.



Aufgabe 2. Für die Funktion f gilt: $f(x) = 4 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + x - 3$

Die Funktion hat eine Nullstelle $x_1 \in \mathbb{Z}$ und zwei Nullstellen $x_2, x_3 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

- a) Begründe, warum jede ganzzahlige Nullstelle von f ein Teiler des konstanten Terms -3 sein muss, und ermittle die Nullstelle x_1 .
- b) Berechne mithilfe einer Polynomdivision die beiden anderen Nullstellen x_2 und x_3 , und zerlege den Funktionsterm in Linearfaktoren:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

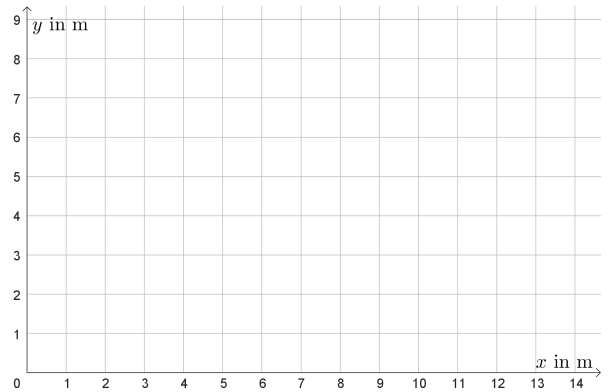
Aufgabe 3. Ein Punkt bewegt sich ausgehend von $A = (2 \text{ m} \mid 1 \text{ m})$ mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung seines Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 3 \text{ m/s} \\ 1 \text{ m/s} \end{pmatrix}$.

Ein zweiter Punkt bewegt sich ausgehend von $B = (4 \text{ m} \mid 8 \text{ m})$ mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung seines Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 2 \text{ m/s} \\ -1 \text{ m/s} \end{pmatrix}$.

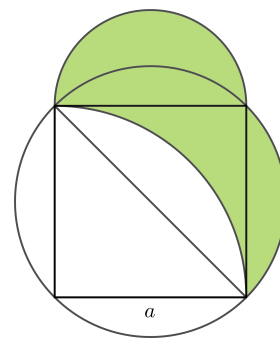
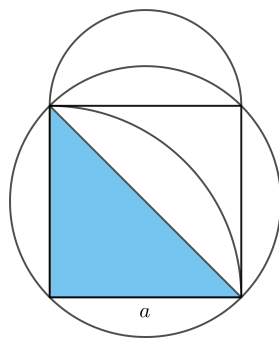
- a) Konstruiere rechts den Schnittpunkt S der beiden Bewegungsbahnen.
- b) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S .

Wenn beide Punkte gleichzeitig starten, dann sind sie *nicht* zur gleichen Zeit im Schnittpunkt S .

- c) Berechne die Zeitdauer (in Sekunden), um die der zweite Punkt ausgehend von B früher/später starten muss, damit die beiden Punkte zur gleichen Zeit im Schnittpunkt S sind.

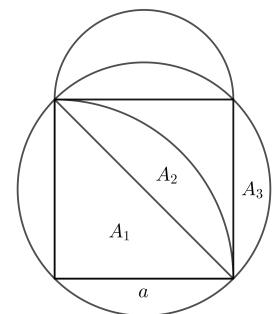


Aufgabe 4. Die blaue Fläche links unten ist ein halbes Quadrat mit Seitenlänge a . Die grüne Fläche rechts unten wird von einem Halbkreis und zwei Viertelkreisen berandet:



- a) Stelle mithilfe von a eine Formel für die rechts eingezeichneten Flächeninhalte A_1 , A_2 und A_3 auf.

$A_1 =$
 $A_2 =$
 $A_3 =$



- b) Zeige, dass das Verhältnis der Flächeninhalte der oben eingezeichneten blauen Fläche und der grünen Fläche $2 : 3$ beträgt.

Aufgabe 5. Für die Funktion f gilt: $f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ mit $r > 0$ und $-r < x < r$

a) Ermittle eine Funktionsgleichung von f' .

Für die Krümmung κ einer zweimal differenzierbaren Funktion f an der Stelle x gilt allgemein:

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

b) Zeige, dass für diese Funktion f gilt:

$$[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}} = \frac{r^3}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

c) ★ Zeige, dass für diese Funktion f gilt:

$$f''(x) = \frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

d) Zeige, dass die Krümmung $\kappa(x)$ für diese Funktion f *nicht* von x abhängt.

e) Skizziere rechts oben den Funktionsgraphen von f , wenn $r = 2$ gilt.

