Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

1. Hinweise

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorherigen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne $\bigstar$ - Bonuspunkte).
- Die mit $\bigstar$ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

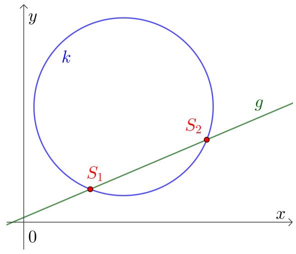
2. Aufgaben

Aufgabe 1. Die Gerade g und der Kreis k mit

$$g\colon\ -3\cdot x+7\cdot y=2 \qquad\qquad k\colon\ (x-6)^2+(y-7)^2=29$$

schneiden einander in den Punkten S_1 und S_2.

Berechne die Entfernung zwischen diesen beiden Schnittpunkten.



Lösung. Die Schnittpunkte sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}: &\qquad -3\cdot x+7\cdot y=2 \quad \implies x=\frac{7\cdot y-2}{3}\\
\mathrm{II}: &\quad (x-6)^2+(y-7)^2=29
\end{aligned}$$

Wir setzen in Gleichung II ein und formen um:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{7\cdot y-2}{3}-6\right)^2+y^2-14\cdot y+49&=29\\
\left(\frac{7\cdot y-20}{3}\right)^2+y^2-14\cdot y+20&=0\\
\frac{49\cdot y^2-280\cdot y+400}{9}+y^2-14\cdot y+20&=0\\
49\cdot y^2-280\cdot y+400+9\cdot y^2-126\cdot y+180&=0\\
58\cdot y^2-406\cdot y+580&=0
\end{aligned}$$

Einsetzen der Koeffizienten $a=58,\ b=-406,\ c=580$ in die große Lösungsformel liefert:

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \implies y_1=2,\ y_2=5$$

Einsetzen in I liefert die Schnittpunkte:

$$\begin{aligned}
y_1=2 &\implies x_1=\frac{7\cdot 2-2}{3}=4 &&\implies S_1=(4\mid 2)\\
y_2=5 &\implies x_2=\frac{7\cdot 5-2}{3}=11 &&\implies S_2=(11\mid 5)
\end{aligned}$$

Der Satz von Pythagoras liefert die Entfernung zwischen den beiden Schnittpunkten:

$$\sqrt{(5-2)^2+(11-4)^2}=\sqrt{58}=7{,}615\ldots \qquad \square$$

Aufgabe 2. Das Krümmungsverhalten der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^4 - k \cdot x^3 + 42 \cdot x - 23$$

hängt vom Wert des Parameters $k \in \mathbb{R}$ ab.
Ermittle das Krümmungsverhalten von f in Abhängigkeit von k.

Hinweis: Es gibt 3 Fälle zu unterscheiden.

Lösung. Wir ermitteln die ersten beiden Ableitungsfunktionen:

$$f'(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot k \cdot x^2 + 42$$
$$f''(x) = 6 \cdot x^2 - 6 \cdot k \cdot x = 6 \cdot x \cdot (x - k)$$

Die Nullstellen von f'' sind also $x_1 = 0$ und $x_2 = k$.

- Fall 1: $k = 0$
  In diesem Fall wechselt $f''(x) = 6 \cdot x \cdot x$ an keiner Stelle das Vorzeichen.
  Wir ermitteln das Krümmungsverhalten von f:

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+$	kein Wendepunkt	$+$

- Fall 2: $k > 0$
  In diesem Fall wechselt $f''(x) = 6 \cdot x \cdot (x - k)$ an den Stellen 0 und k das Vorzeichen.
  Wir ermitteln das Krümmungsverhalten von f:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < k$	$x = k$	$x > k$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	Wendepunkt	$-$	Wendepunkt	$+$

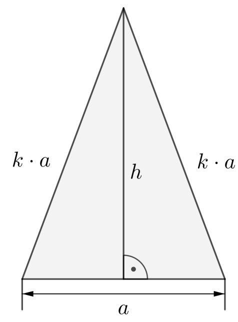
- Fall 3: $k < 0$
  In diesem Fall wechselt $f''(x) = 6 \cdot (x - k) \cdot x$ an den Stellen k und 0 das Vorzeichen.
  Wir ermitteln das Krümmungsverhalten von f:

	$x < k$	$x = k$	$k < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	Wendepunkt	$-$	Wendepunkt	$+$

$\square$

Aufgabe 3. Wir betrachten gleichschenkelige Dreiecke mit Basis a.

Die Schenkel haben jeweils die Länge $k \cdot a$.



a) Damit sich tatsächlich ein gleichschenkeliges Dreieck ausgeht,

muss $k > \boxed{}$ gelten.

Trage die richtige Zahl in das Kästchen ein, und begründe deine Antwort.

b) Zeige, dass für den Flächeninhalt F des Dreiecks gilt:

$$F = \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}$$

c) Berechne k so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks 4-mal so groß ist wie der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a.

Lösung.

a) Damit die Dreiecksungleichungen erfüllt sind, muss $a < k \cdot a + k \cdot a$ gelten, also:

$$a < 2 \cdot a \cdot k \iff k > \frac{a}{2 \cdot a} \iff k > \frac{1}{2}$$

b) Für die Höhe h auf die Basis a folgt aus dem Satz von Pythagoras:

$$h = \sqrt{k^2 \cdot a^2 - \frac{a^2}{4}} = a \cdot \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}$$

Für den Flächeninhalt F gilt also:

$$F = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}$$

c) Mit $k = 1$ erhalten wir den Flächeninhalt $F_\triangle$ vom gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a:

$$F_\triangle = \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{1^2 - \frac{1}{4}} = \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Wir lösen die Gleichung $F = 4 \cdot F_\triangle$:

$$\frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}} = 4 \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \iff \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}} = 2 \cdot \sqrt{3} \qquad (\star)$$

Wir quadrieren beide Seiten der Gleichung:

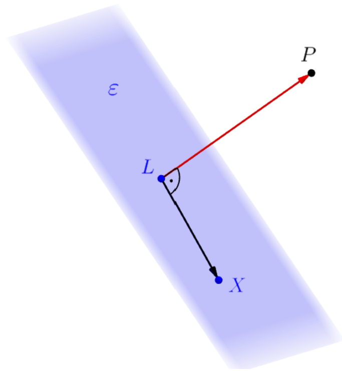
$$k^2 - \frac{1}{4} = 12 \iff k^2 = \frac{49}{4} \iff k = \pm \frac{7}{2}$$

Durch Einsetzen in $(\star)$ überprüfen wir, ob $k = \frac{7}{2}$ tatsächlich die gesuchte Lösung ist:

$$\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{48}{4}} = \sqrt{12} = 2 \cdot \sqrt{3} \checkmark$$

□

Aufgabe 4. Die beiden Punkte $L = (3 \mid -5 \mid 1)$ und $X = (x \mid y \mid z)$ liegen in der Ebene ε.
Der Punkt $P = (-5 \mid -9 \mid 7)$ liegt *nicht* in der Ebene ε.
Der Vektor $\overrightarrow{LP}$ steht im rechten Winkel auf den Vektor $\overrightarrow{LX}$.



a) Trage die richtige Zahl in das Kästchen ein:

$$\overrightarrow{LP} \cdot \overrightarrow{LX} = \boxed{}$$

b) Ermittle eine Ebenengleichung von ε, das heißt:
Berechne Zahlen a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ so, dass

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

genau für jeden Punkt $X = (x \mid y \mid z)$ in der Ebene ε gilt.

Für eine andere Ebene π gilt: $3 \cdot x - 5 \cdot y + 2 \cdot z = -32$

c) Ermittle eine Parameterdarstellung jener Gerade g, die durch P verläuft und normal auf π steht.

d) Berechne den Schnittpunkt dieser Gerade g und der Ebene π.

e) Berechne den Abstand von P zu π.

Lösung.

a) Da die Vektoren $\overrightarrow{LP}$ und $\overrightarrow{LX}$ im rechten Winkel aufeinander stehen, gilt: $\overrightarrow{LP} \cdot \overrightarrow{LX} = 0$

b) Für die Vektoren $\overrightarrow{LP}$ bzw. $\overrightarrow{LX}$ gilt:

$$\overrightarrow{LP} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{LX} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y+5 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

Aus $\overrightarrow{LP} \cdot \overrightarrow{LX} = 0$ erhalten wir eine Ebenengleichung von ε:

$$-8 \cdot x + 24 - 4 \cdot y - 20 + 6 \cdot z - 6 = 0 \iff -8 \cdot x - 4 \cdot y + 6 \cdot z = 2$$

c) Die Koeffizienten der Ebenengleichung liefern einen Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ von π. Es folgt:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d) Wir setzen $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+3\cdot t \\ -9-5\cdot t \\ 7+2\cdot t \end{pmatrix}$ in die Ebenengleichung von π ein:

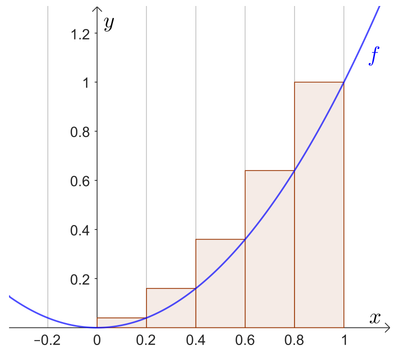
$$\begin{aligned} 3 \cdot (-5 + 3 \cdot t) - 5 \cdot (-9 - 5 \cdot t) + 2 \cdot (7 + 2 \cdot t) &= -32 \\ -15 + 9 \cdot t + 45 + 25 \cdot t + 14 + 4 \cdot t &= -32 \\ 38 \cdot t &= -76 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

Für den Schnittpunkt S gilt also: $S = (-5 + 3 \cdot (-2) \mid -9 - 5 \cdot (-2) \mid 7 + 2 \cdot (-2)) = (-11 \mid 1 \mid 3)$

e) Für den Abstand von P zu π gilt: $|\overrightarrow{PS}| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2 + 10^2 + 4^2} = \sqrt{152} = 12{,}32\ldots$ □

Aufgabe 5. Für die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ gilt:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$$



a) Berechne s_5.

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ ist rechts dargestellt.

b) Zeichne rechts 5 Rechtecke so ein, dass sie zusammen den Flächeninhalt s_5 haben.

c) Ermittle den Grenzwert: $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$

d) ☆ Sei $\varepsilon > 0$. Gib einen Index $n(\varepsilon)$ so an, dass $|s_n - s| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n(\varepsilon)$ gilt.

Lösung.

a) Es gilt: $s_5 = \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{5}\right)^2\right] = \frac{11}{25}$

b) Es gilt: $s_5 = \sum\limits_{k=1}^{5} \frac{1}{5} \cdot f\left(\frac{k}{5}\right)$

Da f streng monoton wachsend ist, können wir s_5 als die Obersumme von f in $[0; 1]$ mit 5 gleich breiten Rechtecken interpretieren. Die zugehörigen 5 Rechtecke sind oben eingezeichnet.

c) Da f stetig ist, folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

d) Da f streng monoton wachsend ist, gilt für die Differenz Δ_n von Ober- und Untersumme bei Verwendung von n gleich breiten Rechtecken:

$$\Delta_n = \frac{1}{n} \cdot f(1) - \frac{1}{n} \cdot f(0) = \frac{1}{n}$$

Da s zwischen der Unter- und Obersumme liegt, ist der Abstand von der Obersumme s_n zu s kleiner als Δ_n. Es gilt:

$$\Delta_n < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Wenn $n(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ gilt, dann folgt also

$$|s_n - s| < \Delta_n < \varepsilon$$

für alle $n \geq n(\varepsilon)$. □