Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorherigen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
– Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
– Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = (k \cdot x + d) \cdot e^{-x^2} \quad \text{mit } k \neq 0$$

a) Ermittle die Ableitungsfunktion f'.

b) Begründe, warum f' jedenfalls zwei verschiedene reelle Nullstellen hat.

c) Ermittle das Monotonieverhalten von f, wenn $k = 4$ und $d = -2$ gilt.

Lösung.

a) Aus der Produktregel und der Kettenregel folgt:

$$f'(x) = k \cdot e^{-x^2} + (k \cdot x + d) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2 \cdot x) =$$
$$= (-2 \cdot k \cdot x^2 - 2 \cdot d \cdot x + k) \cdot e^{-x^2}$$

b) Aus dem Produkt-Null-Satz und $e^{-x^2} > 0$ folgt:

$$f'(x) = 0 \iff -2 \cdot k \cdot x^2 - 2 \cdot d \cdot x + k = 0$$

Wir lösen die quadratische Gleichung mit der großen Lösungsformel
($a = -2 \cdot k,\ b = -2 \cdot d,\ c = k$):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{2 \cdot d \pm \sqrt{4 \cdot d^2 + 8 \cdot k^2}}{-4 \cdot k}$$

Die Diskriminante $4 \cdot d^2 + 8 \cdot k^2$ ist positiv, weil $4 \cdot d^2 \geq 0$ und $8 \cdot k^2 > 0$ gilt. Also hat f' zwei verschiedene reelle Nullstellen.

c) Wir berechnen die beiden Lösungen von $f'(x) = 0$ für $k = 4$ und $d = -2$:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 128}}{-16} = \frac{-4 \pm 12}{-16}$$

Die beiden Nullstellen von f' sind also $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$. Daraus folgt:

$$f'(x) = (-8 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 4) \cdot e^{-x^2} = (-8) \cdot (x + \tfrac{1}{2}) \cdot (x - 1) \cdot e^{-x^2}$$

Für das Vorzeichen von f' und das Monotonieverhalten von f gilt also:

	$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	Tiefpunkt	$\nearrow$	Hochpunkt	$\searrow$

$\square$

Aufgabe 2. Für die Polynomfunktion p gilt: $p(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 15$

a) Zeige, dass bei der Polynomdivision

$$p(x) : (x - 1)$$

kein Rest bleibt.

b) Ermittle alle Nullstellen von p und vervollständige die Linearfaktorform von p.

$$p(x) = \boxed{} \cdot \left(\boxed{}\right) \cdot \left(\boxed{}\right) \cdot \left(\boxed{}\right)$$

Lösung.

a) Wir führen die Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{l}
\ominus \begin{cases} (2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 15) : (x - 1) = 2 \cdot x^2 - x - 15 \\ 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 \end{cases} \\
\hline
\quad \ominus \begin{cases} -1 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 15 \\ -1 \cdot x^2 + \ \ 1 \cdot x \end{cases} \\
\hline
\qquad \ominus \begin{cases} -15 \cdot x + 15 \\ -15 \cdot x + 15 \end{cases} \\
\hline
\qquad\qquad 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

b) Aus **a)** folgt:

$$p(x) = (2 \cdot x^2 - x - 15) \cdot (x - 1)$$

Aus dem Produkt-Null-Satz folgt, dass die Polynomfunktion p die Nullstelle $x_1 = 1$ haben muss. Aus dem Produkt-Null-Satz folgt, dass die beiden anderen Nullstellen von p die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$2 \cdot x^2 - x - 15 = 0$$

sind. Wir lösen sie mit der großen Lösungsformel ($a = 2,\ b = -1,\ c = -15$):

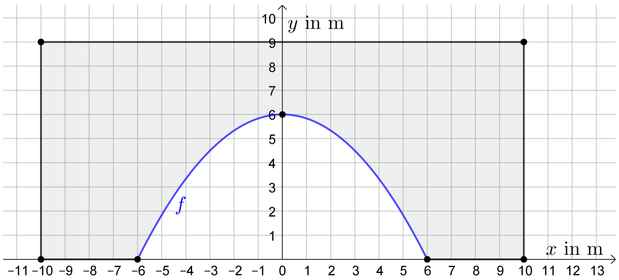
$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{4} = \frac{1 \pm 11}{4} \implies x_2 = 3,\ x_3 = -\frac{5}{2}$$

Für die Linearfaktorform von p gilt also:

$$p(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{5}{2}\right) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$$

□

Aufgabe 3. Der Querschnitt eines Brückenbogens ist dargestellt.



Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

a) Ermittle die Koeffizienten a, b und c.

b) Berechne den Inhalt der grau markierten Querschnittsfläche.

Lösung.

a) Da die quadratische Funktion die Nullstellen -6 und 6 hat, gilt:

$$f(x) = a \cdot (x+6) \cdot (x-6) = a \cdot x^2 - 36 \cdot a$$

Aus $f(0) = 6$ folgt $a = -\frac{1}{6}$ und damit:

$$f(x) = -\frac{1}{6} \cdot x^2 + 6$$

b) Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt:

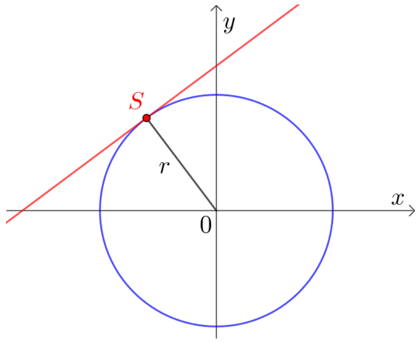
$$\int_0^6 \left(-\frac{1}{6} \cdot x^2 + 6\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{18} \cdot x^3 + 6 \cdot x \,\Big|_0^6 = 24$$

Für den Inhalt A der grau markierten Fläche gilt also:

$$A = 2 \cdot (90 - 24) = 132\,\mathrm{m}^2$$

□

Aufgabe 4. Für den Kreis mit Mittelpunkt $(0 \mid 0)$ und Radius r gilt: $x^2 + y^2 = r^2$
Zu jeder Gerade $y = k \cdot x + d$ mit $d \neq 0$ gibt es genau einen Radius $r > 0$ so, dass der Kreis und die Gerade einander in genau einem Punkt S berühren.



a) Berechne diesen Radius r und diesen Berührpunkt S für die Gerade $y = \frac{3}{4} \cdot x + 20$.

b) Stelle mithilfe von k und d eine Formel zur Berechnung von r auf.

$r = $

Lösung.

a) Um den Schnittpunkt $S = (x \mid y)$ zu ermitteln, lösen wir das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I}: \quad & y = \frac{3}{4} \cdot x + 20 \\ \text{II}: \quad & x^2 + y^2 = r^2 \end{aligned}$$

Wir setzen I in II ein und vereinfachen:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{3}{4} \cdot x + 20\right)^2 &= r^2 \\ x^2 + \frac{9}{16} \cdot x^2 + 30 \cdot x + 400 &= r^2 \\ \frac{25}{16} \cdot x^2 + 30 \cdot x + 400 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ob diese quadratische Gleichung keine, genau eine oder zwei reelle Lösungen hat, hängt vom Radius r ab. Für die Diskriminante D in der großen Lösungsformel ($a = \frac{25}{16}$, $b = 30$, $c = 400 - r^2$) gilt:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 900 - \frac{25}{4} \cdot (400 - r^2)$$

Genau dann, wenn $D = 0$ gilt, hat die quadratische Gleichung genau eine reelle Lösung:

$$900 = \frac{25}{4} \cdot (400 - r^2) \iff r^2 = 256$$

Für den gesuchten Radius r gilt also $r = \sqrt{256} = 16$.
In diesem Fall hat die quadratische Gleichung genau eine reelle Lösung:

$$x = \frac{-b}{2 \cdot a} = -9{,}6 \implies y = \frac{3}{4} \cdot (-9{,}6) + 20 = 12{,}8 \implies S = (-9{,}6 \mid 12{,}8)$$

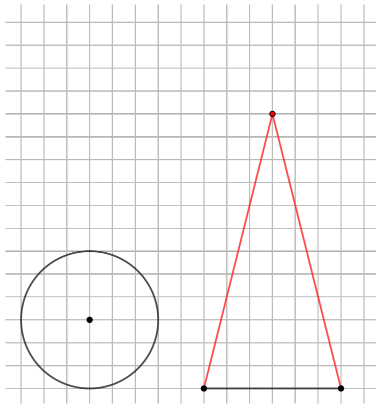
b) Die gleiche Rechnung allgemein mit $y = k \cdot x + d$ liefert: $r = \sqrt{\dfrac{d^2}{1 + k^2}}$ □

Aufgabe 5. Für das Volumen V_K einer Kugel mit Radius r gilt: $V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Für das Volumen V_D eines Drehkegels mit Radius r und Höhe h gilt: $V_D = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

a) Eine Kugel und ein Drehkegel haben den gleichen Radius r und das gleiche Volumen. Stelle mithilfe von r eine Formel für die Höhe h des Drehkegels auf.

$h =$



Ein Querschnitt dieser Kugel ist rechts dargestellt. Vervollständige den Querschnitt des Drehkegels so, dass die Kugel und der Drehkegel das gleiche Volumen haben.

b) Für den Oberflächeninhalt O_K einer Kugel mit Radius r gilt:

$$O_K = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Bei einem Drehkegel heißt jede Strecke, die die Spitze mit dem Grundkreis verbindet, auch Erzeugende. Für den Oberflächeninhalt O_D eines Drehkegels mit Radius r und Erzeugender s gilt:

$$O_D = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$

Eine Kugel und ein Drehkegel haben den gleichen Radius und das gleiche Volumen. Berechne, um wie viel Prozent der Oberflächeninhalt des Drehkegels größer als jener der Kugel ist.

Lösung.

a) Da Radius und Volumen gleich sind, gilt:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \implies 4 \cdot r^3 = r^2 \cdot h \implies h = 4 \cdot r$$

b) Aus dem Satz von Pythagoras und **a)** folgt:

$$s = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(4 \cdot r)^2 + r^2} = r \cdot \sqrt{17}$$

Für den Oberflächeninhalt des Drehkegels gilt also:

$$O_D = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r^2 \cdot \sqrt{17} = (1 + \sqrt{17}) \cdot \pi \cdot r^2$$

Daraus folgt:

$$\frac{O_D}{O_K} = \frac{(1 + \sqrt{17}) \cdot \pi \cdot r^2}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} = 1{,}2807\ldots$$

Also ist der Oberflächeninhalt des Drehkegels um 28,07... % größer als jener der Kugel. □