1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist gleich viele Punkte wert.
– Wähle am Ende, welche 4 der 5 Aufgaben zur Beurteilung herangezogen werden sollen.

2. Aufgaben

2.1. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$\log_{42}\left[(7\cdot x-1)^2\right] = 3\cdot\log_{42}(2\cdot x+1)$$

Lösung.

$$\begin{aligned}
\iff\quad & \log_{42}\left[(7\cdot x-1)^2\right] = \log_{42}\left[(2\cdot x+1)^3\right] && \text{Rechenregeln für Logarithmen}\\
\iff\quad & (7\cdot x-1)^2 = (2\cdot x+1)^3 && \log_{42}\text{ injektiv}\\
\iff\quad & 49\cdot x^2-14\cdot x+1 = 8\cdot x^3+12\cdot x^2+6\cdot x+1 && \text{Binomischer Lehrsatz}\\
\iff\quad & 0 = 8\cdot x^3-37\cdot x^2+20\cdot x\\
\iff\quad & 0 = x\cdot(8\cdot x^2-37\cdot x+20)
\end{aligned}$$

Produkt-Null-Satz und quadratische Gleichung lösen: $L=\left\{0;\frac{5}{8};4\right\}$ □

2.2. Wie muss der Parameter $a\in\mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Polynomfunktion p mit

$$p(x)=x^3-3\cdot x+a$$

genau **a)** eine **b)** zwei **c)** drei **d)** keine reelle Nullstelle(n) hat?
Begründe deine Antwort sorgfältig mithilfe des Zwischenwertsatzes.
Du darfst in dieser Aufgabe verwenden, dass

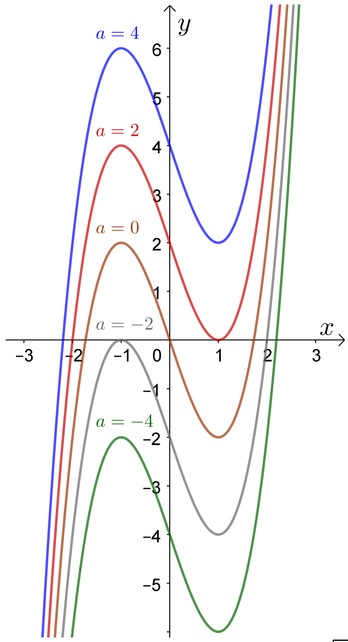
$$p'(x)=3\cdot(x-1)\cdot(x+1).$$

Lösung.

$$p'(x)=0 \iff x=-1 \text{ oder } x=1$$

p' wechselt an der Stelle -1 das Vorzeichen von $+$ auf $-$.
p hat also den Hochpunkt $H=(-1\mid a+2)$.
p' wechselt an der Stelle 1 das Vorzeichen von $-$ auf $+$.
p hat also den Tiefpunkt $T=(1\mid a-2)$.
Monotonieverhalten von p: $]-\infty;-1[\ \nearrow\quad]-1;1[\ \searrow\quad]1;\infty[\ \nearrow$

p ist eine stetige Funktion mit $\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$ und $\lim_{x \to \infty} p(x) = \infty$.
Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass p mindestens eine reelle Nullstelle hat.



- $a < -2$: H liegt unter der x-Achse.
  p hat also genau eine reelle Nullstelle.
- $a = -2$: H liegt auf der x-Achse.
  p hat also genau zwei reelle Nullstellen.
- $-2 < a < 2$: H liegt über der x-Achse,
  und T liegt unter der x-Achse.
  p hat also genau drei reelle Nullstellen.
- $a = 2$: T liegt auf der x-Achse.
  p hat also genau zwei reelle Nullstellen.
- $a > -2$: T liegt über der x-Achse.
  p hat also genau eine reelle Nullstelle.

$\square$

2.3. Sei $a > 0$. Eine quadratische Funktion f hat den Scheitelpunkt $(0 \mid \frac{1}{a})$.
Die Nullstellen von f sind $-a$ und a.
Die horizontale Achse schließt mit dem Funktionsgraphen im Intervall $[-a; a]$ ein Flächenstück ein.
Zeige, dass der Flächeninhalt dieses Flächenstücks *nicht* vom Wert von a abhängt.

Lösung.

$$f(x) = c \cdot (x - a) \cdot (x + a) \qquad \text{Linearfaktorform}$$

$$f(0) = \frac{1}{a} \implies c = -\frac{1}{a^3}$$

$$\implies f(x) = -\frac{1}{a^3} \cdot x^2 + \frac{1}{a}$$

$$\int_{-a}^{a} \underbrace{f(x)}_{=f(-x)} \, dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) \, dx = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3 \cdot a^3} \cdot x^3 + \frac{1}{a} \cdot x \right) \Bigg|_0^a = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{4}{3}$$

$\square$

2.4. Wir betrachten in dieser Aufgabe die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{(x^3 + 1)^4}{(x^4 + 1)^3}$$

a) Zeige, dass gilt:

$$f'(x) = \frac{12 \cdot x^2 \cdot (x^3 + 1)^3 \cdot (1 - x)}{(x^4 + 1)^4}$$

Dokumentiere dabei die Verwendung von Ableitungsregeln sorgfältig.

b) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x^3+1)^4 \leq 2 \cdot (x^4+1)^3$$

Lösung.

a) Quotientenregel und Kettenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4 \cdot (x^3+1)^3 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot (x^4+1)^3 - (x^3+1)^4 \cdot 3 \cdot (x^4+1)^2 \cdot 4 \cdot x^3}{(x^4+1)^6} \\ &= \frac{(x^4+1)^2 \cdot 12 \cdot x^2 \cdot (x^3+1)^3 \cdot [(x^4+1) - (x^3+1) \cdot x]}{(x^4+1)^6} \qquad \text{Faktorisieren} \\ &= \frac{12 \cdot x^2 \cdot (x^3+1)^3 \cdot (1-x)}{(x^4+1)^4} \end{aligned}$$

b) Kritische Stellen:

$$f'(x) = 0 \iff x \in \{-1; 0; 1\}$$

f ist eine stetige Funktion mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1.$

Zähler und Nenner sind Polynome mit führendem Koeffizienten 1.

Es gilt $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$.
f' ändert bei -1 das Vorzeichen von $-$ auf $+$. (Tiefpunkt)
f' ändert bei 0 das Vorzeichen nicht. (Sattelpunkt)
f' ändert bei 1 das Vorzeichen von $+$ auf $-$. (Hochpunkt)
Also gilt $f(x) \leq 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus $(x^4+1)^4 > 0$ folgt durch Multiplizieren des Nenners von f die Ungleichung.

□

2.5. Deine SchülerInnen im Wahlpflichtgegenstand wissen bereits, dass

$$\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx.$$

Sie wissen über den Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Unter- und Obersummen Bescheid. In diesem Zusammenhang ist nun dein nächstes Ziel, die folgende Abschätzung zu erklären:

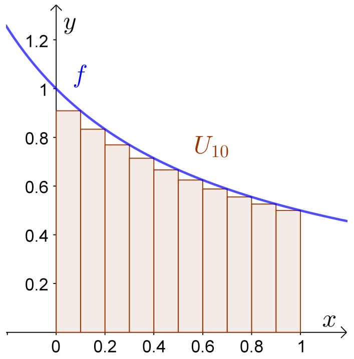
$$0 < \ln(2) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}\right) < 0{,}005$$

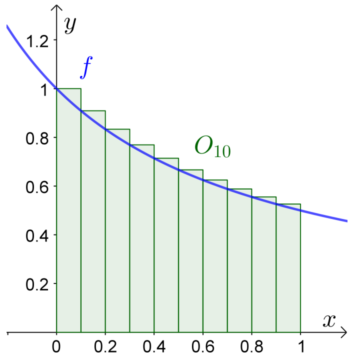
Michael hat leider gefehlt. Dokumentiere deine Erklärung dieser Abschätzung so, dass Michael sie anhand deiner Notizen gut nachvollziehen kann.

Lösung. Wir berechnen die Untersumme U_n und die Obersumme O_n von $f(x) = \frac{1}{1+x}$ mit n gleich breiten Rechtecken in $[0;1]$:

$$U_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

$$O_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{0}{n}} + \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n-1}{n}} \right) = \frac{1}{n+0} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)}$$





Die Differenz ist

$$O_n - U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2 \cdot n} = \frac{2}{2 \cdot n} - \frac{1}{2 \cdot n} = \frac{1}{2 \cdot n}$$

f ist streng monoton fallend. Für das bestimmte Integral gilt also:

$$U_{100} < \int_0^1 \frac{1}{1+x} \,\mathrm{d}x < O_{100}$$

$$\implies \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} < \ln(2) < \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} \right) + \frac{1}{200}$$

$$\implies 0 < \ln(2) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} \right) < 0{,}005$$

□