

1. HINWEISE

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist gleich viele Punkte wert.
- Wähle am Ende, welche 4 der 5 Aufgaben zur Beurteilung herangezogen werden sollen.

2. AUFGABEN

2.1. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge \mathbb{R} .

$$\log_{42} [(7 \cdot x - 1)^2] = 3 \cdot \log_{42}(2 \cdot x + 1)$$

Lösung

$$\begin{aligned} \iff \log_{42} [(7 \cdot x - 1)^2] &= \log_{42} [(2 \cdot x + 1)^3] && \text{Rechenregeln für Logarithmen} \\ \iff (7 \cdot x - 1)^2 &= (2 \cdot x + 1)^3 && \log_{42} \text{ injektiv} \\ \iff 49 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 1 &= 8 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 1 && \text{Binomischer Lehrsatz} \\ \iff 0 &= 8 \cdot x^3 - 37 \cdot x^2 + 20 \cdot x \\ \iff 0 &= x \cdot (8 \cdot x^2 - 37 \cdot x + 20) \end{aligned}$$

Produkt-Null-Satz und quadratische Gleichung lösen: $L = \left\{0; \frac{5}{8}; 4\right\}$ □

2.2. Wie muss der Parameter $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Polynomfunktion p mit

$$p(x) = x^3 - 3 \cdot x + a$$

genau **a)** eine **b)** zwei **c)** drei **d)** keine reelle Nullstelle(n) hat?

Begründe deine Antwort sorgfältig mithilfe des Zwischenwertsatzes.

Du darfst in dieser Aufgabe verwenden, dass

$$p'(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1).$$

Lösung

$$p'(x) = 0 \iff x = -1 \text{ oder } x = 1$$

p' wechselt an der Stelle -1 das Vorzeichen von $+$ auf $-$.

p hat also den Hochpunkt $H = (-1 \mid a + 2)$.

p' wechselt an der Stelle 1 das Vorzeichen von $-$ auf $+$.

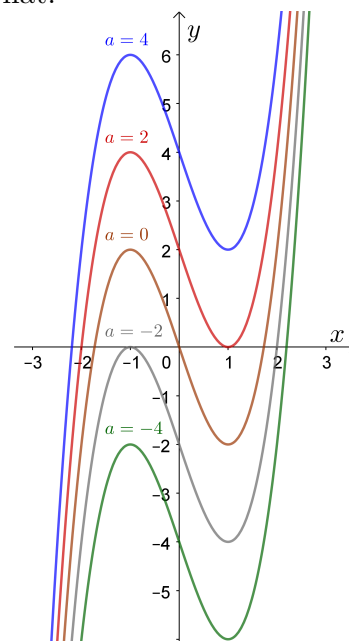
p hat also den Tiefpunkt $T = (1 \mid a - 2)$.

Monotonieverhalten von p : $]-\infty; -1[\nearrow \quad]-1; 1[\searrow \quad]1; \infty[\nearrow$

p ist eine stetige Funktion mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$.

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass p mindestens eine reelle Nullstelle hat.

- $a < -2$: H liegt unter der x -Achse.
 p hat also genau eine reelle Nullstelle.
- $a = -2$: H liegt auf der x -Achse.
 p hat also genau zwei reelle Nullstellen.
- $-2 < a < 2$: H liegt über der x -Achse,
 und T liegt unter der x -Achse.
 p hat also genau drei reelle Nullstellen.
- $a = 2$: T liegt auf der x -Achse.
 p hat also genau zwei reelle Nullstellen.
- $a > 2$: T liegt über der x -Achse.
 p hat also genau eine reelle Nullstelle.



□

2.3. Sei $a > 0$. Eine quadratische Funktion f hat den Scheitelpunkt $(0 \mid \frac{1}{a})$.

Die Nullstellen von f sind $-a$ und a .

Die horizontale Achse schließt mit dem Funktionsgraphen im Intervall $[-a; a]$ ein Flächenstück ein.

Zeige, dass der Flächeninhalt dieses Flächenstücks *nicht* vom Wert von a abhängt.

Lösung

$$f(x) = c \cdot (x - a) \cdot (x + a) \quad \text{Linearfaktorform}$$

$$f(0) = \frac{1}{a} \implies c = -\frac{1}{a^3}$$

$$\implies f(x) = -\frac{1}{a^3} \cdot x^2 + \frac{1}{a}$$

$$\int_{-a}^a \underbrace{f(x)}_{=f(-x)} dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3 \cdot a^3} \cdot x^3 + \frac{1}{a} \cdot x \right) \Big|_0^a = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{4}{3}$$

□

2.4. Wir betrachten in dieser Aufgabe die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(x^3 + 1)^4}{(x^4 + 1)^3}$$

a) Zeige, dass gilt:

$$f'(x) = \frac{12 \cdot x^2 \cdot (x^3 + 1)^3 \cdot (1 - x)}{(x^4 + 1)^4}$$

Dokumentiere dabei die Verwendung von Ableitungsregeln sorgfältig.

b) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x^3 + 1)^4 \leq 2 \cdot (x^4 + 1)^3$$

Lösung

a) Quotientenregel und Kettenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4 \cdot (x^3 + 1)^3 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot (x^4 + 1)^3 - (x^3 + 1)^4 \cdot 3 \cdot (x^4 + 1)^2 \cdot 4 \cdot x^3}{(x^4 + 1)^6} \\ &= \frac{(x^4 + 1)^2 \cdot 12 \cdot x^2 \cdot (x^3 + 1)^3 \cdot [(x^4 + 1) - (x^3 + 1) \cdot x]}{(x^4 + 1)^6} && \text{Faktorisieren} \\ &= \frac{12 \cdot x^2 \cdot (x^3 + 1)^3 \cdot (1 - x)}{(x^4 + 1)^4} \end{aligned}$$

b) Kritische Stellen:

$$f'(x) = 0 \iff x \in \{-1; 0; 1\}$$

f ist eine stetige Funktion mit $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

Zähler und Nenner sind Polynome mit führendem Koeffizienten 1.

Es gilt $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$.

f' ändert bei -1 das Vorzeichen von $-$ auf $+$. (Tiefpunkt)

f' ändert bei 0 das Vorzeichen nicht. (Sattelpunkt)

f' ändert bei 1 das Vorzeichen von $+$ auf $-$. (Hochpunkt)

Also gilt $f(x) \leq 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus $(x^4 + 1)^4 > 0$ folgt durch Multiplizieren des Nenners von f die Ungleichung.

□

2.5. Deine SchülerInnen im Wahlpflichtgegenstand wissen bereits, dass

$$\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx.$$

Sie wissen über den Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Unter- und Obersummen Bescheid. In diesem Zusammenhang ist nun dein nächstes Ziel, die folgende Abschätzung zu erklären:

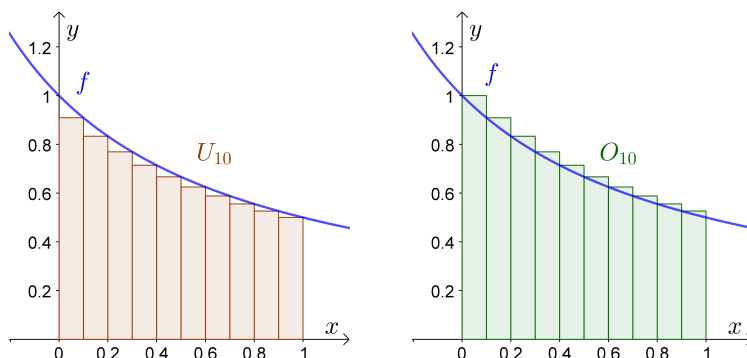
$$0 < \ln(2) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} \right) < 0,005$$

Michael hat leider gefehlt. Dokumentiere deine Erklärung dieser Abschätzung so, dass Michael sie anhand deiner Notizen gut nachvollziehen kann.

Lösung Wir berechnen die Untersumme U_n und die Obersumme O_n von $f(x) = \frac{1}{1+x}$ mit n gleich breiten Rechtecken in $[0; 1]$:

$$U_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

$$O_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{0}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{n-1}{n}} \right) = \frac{1}{n+0} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+(n-1)}$$



Die Differenz ist

$$O_n - U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2 \cdot n} = \frac{2}{2 \cdot n} - \frac{1}{2 \cdot n} = \frac{1}{2 \cdot n}$$

f ist streng monoton fallend. Für das bestimmte Integral gilt also:

$$U_{100} < \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx < O_{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} < \ln(2) < \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} \right) + \frac{1}{200}$$

$$\Rightarrow 0 < \ln(2) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} \right) < 0,005$$

□