

1. HINWEISE

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist gleich viele Punkte wert.
- Wähle am Ende, welche 4 der 5 Aufgaben zur Beurteilung herangezogen werden sollen.

2. AUFGABEN

2.1. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge \mathbb{R} .

$$\log_{42} [(7 \cdot x - 1)^2] = 3 \cdot \log_{42}(2 \cdot x + 1)$$

2.2. Wie muss der Parameter $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Polynomfunktion p mit

$$p(x) = x^3 - 3 \cdot x + a$$

genau **a)** eine **b)** zwei **c)** drei **d)** keine reelle Nullstelle(n) hat?

Begründe deine Antwort sorgfältig mithilfe des Zwischenwertsatzes.

Du darfst in dieser Aufgabe verwenden, dass

$$p'(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1).$$

2.3. Sei $a > 0$. Eine quadratische Funktion f hat den Scheitelpunkt $(0 \mid \frac{1}{a})$.

Die Nullstellen von f sind $-a$ und a .

Die horizontale Achse schließt mit dem Funktionsgraphen im Intervall $[-a; a]$ ein Flächenstück ein.

Zeige, dass der Flächeninhalt dieses Flächenstücks *nicht* vom Wert von a abhängt.

2.4. Wir betrachten in dieser Aufgabe die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(x^3 + 1)^4}{(x^4 + 1)^3}$$

a) Zeige, dass gilt:

$$f'(x) = \frac{12 \cdot x^2 \cdot (x^3 + 1)^3 \cdot (1 - x)}{(x^4 + 1)^4}$$

Dokumentiere dabei die Verwendung von Ableitungsregeln sorgfältig.

b) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x^3 + 1)^4 \leq 2 \cdot (x^4 + 1)^3$$

2.5. Deine SchülerInnen im Wahlpflichtgegenstand wissen bereits, dass

$$\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx.$$

Sie wissen über den Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Unter- und Obersummen Bescheid. In diesem Zusammenhang ist nun dein nächstes Ziel, die folgende Abschätzung zu erklären:

$$0 < \ln(2) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} \right) < 0,005$$

Michael hat leider gefehlt. Dokumentiere deine Erklärung dieser Abschätzung so, dass Michael sie anhand deiner Notizen gut nachvollziehen kann.