Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

1. Hinweise

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
- Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

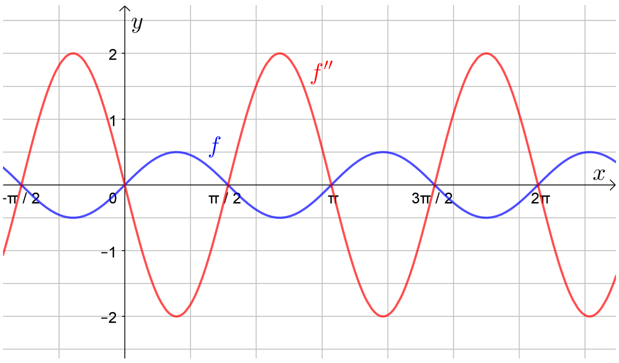
$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2\cdot x+2}$$

Lösung.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow & x+4+2\cdot\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x-2}+x-2 &= 2\cdot x+2 \\ &\Longleftrightarrow & 2\cdot\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x-2} &= 0 \\ &\Longrightarrow & x=-4 \quad \text{oder} \quad x &= 2 \end{aligned}$$

Probe: Der Ausdruck $\sqrt{2\cdot x+2}$ ist nur für $x \geq -1$ definiert.
Also kann $x=-4$ keine Lösung sein.
Für $x=2$ sind alle Ausdrücke definiert und auf beiden Seiten erhält man beim Einsetzen $\sqrt{6}$.
Die Gleichung hat also die Lösungsmenge $L=\{2\}$. $\square$

Aufgabe 2. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ ist rechts unten dargestellt.



1) Es gibt genau eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = c \cdot f''(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Berechne c.

2) Skizziere rechts den Funktionsgraphen von f''.

3) ☆ Berechne $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösung.

1) Wir leiten mit der Produktregel ab:

$$f'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \sin(x)$$

$$f''(x) = -\sin(x) \cdot \cos(x) - \cos(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \sin(x) - \sin(x) \cdot \cos(x) = -4 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

Es gilt also $f''(x) = -4 \cdot f(x)$ bzw. $f(x) = \underbrace{-\tfrac{1}{4}}_{=c} \cdot f''(x)$.

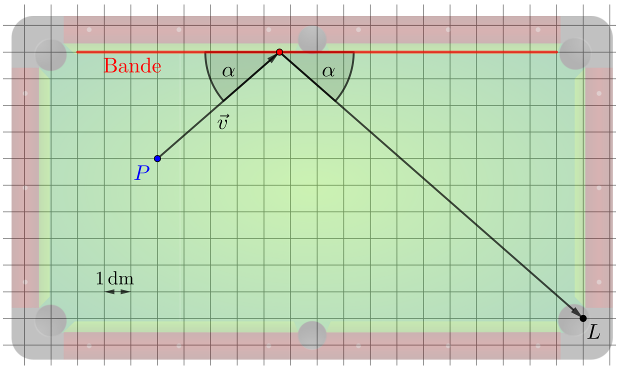
2) Es gilt $f''(x) = -4 \cdot f(x)$. Der Graph von f'' entsteht also aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der x-Achse und Streckung mit dem Faktor 4 in y-Richtung.

3) Aus **1)** und dem Hauptsatz folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} f''(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4} \cdot \left[f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - f'(0)\right] = -\frac{1}{4} \cdot [-1-1] = \frac{1}{2}$$

□

Aufgabe 3. Im Bild rechts unten ist ein Billard-Tisch dargestellt.



Das quadratische Raster hat die Seitenlänge 1 dm.

Die obere Bande verläuft entlang einer Gitterlinie.

Die Kugel im Gitterpunkt P soll so entlang des Vektors $\vec{v}$ gegen die obere Bande gespielt werden, dass sie danach direkt zum Gitterpunkt L rollt.

Die Kugel ist modellhaft punktförmig und es gilt:
Aufprallwinkel = Abprallwinkel = α

1) Berechne den Vektor $\vec{v}$.

2) Berechne den Winkel α.

Lösung.

1) Der Vektor $\vec{v}$ kann über ähnliche Dreiecke bzw. den Strahlensatz ermittelt werden:
Der eingezeichnete Vektor $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks mit den Katheten x und 4. Dann haben in einem dazu ähnlichen Dreieck die entsprechenden Katheten die Längen $16 - x$ und 10. Aus dem Strahlensatz folgt:

$$\frac{16 - x}{x} = \frac{10}{4} \iff 64 - 4 \cdot x = 10 \cdot x \iff x = \frac{64}{14} = 4{,}57...$$

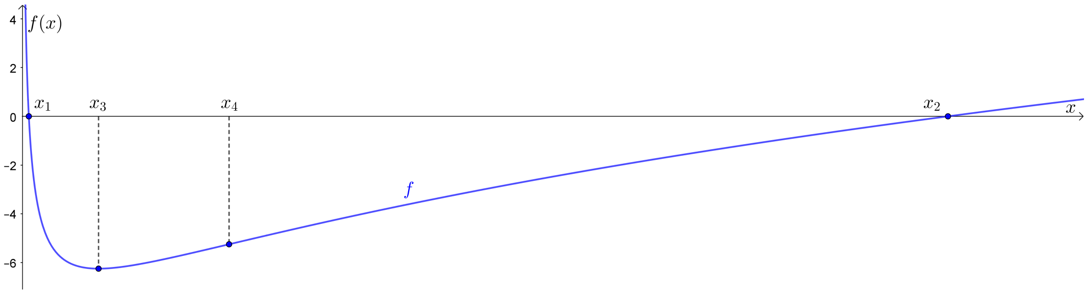
Die Kugel muss also entlang des Vektors $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 4{,}57... \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ gespielt werden.

2) Wir berechnen den Winkel α mit den Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck:

$$\tan(\alpha) = \frac{4}{x} \implies \alpha = \arctan\left(\frac{4}{x}\right) = 41{,}18...^\circ$$

□

Aufgabe 4. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = [\ln(x)]^2 + \ln(x) - 6$ ist unten dargestellt.



1) Berechne die Nullstellen x_1 und x_2. Runde auf 3 Nachkommastellen.

$$x_1 = \boxed{\quad\quad} \qquad x_2 = \boxed{\quad\quad}$$

2) Berechne die Extremstelle x_3. Runde auf 3 Nachkommastellen.

$$x_3 = \boxed{\quad\quad}$$

3) Berechne die Wendestelle x_4. Runde auf 3 Nachkommastellen.

$$x_4 = \boxed{\quad\quad}$$

Lösung.

1) Die Substitution $u = \ln(x)$ liefert eine quadratische Gleichung in u:

$$\underbrace{u^2 + u - 6}_{=(u+3)\cdot(u-2)} = 0 \iff u = -3 \quad \text{oder} \quad u = 2$$

Die beiden Nullstellen sind also $x_1 = e^{-3} \approx 0{,}050$ und $x_2 = e^2 \approx 7{,}389$.

2) Wir ermitteln f' mit der Kettenregel:

$$f'(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = [2 \cdot \ln(x) + 1] \cdot \frac{1}{x}$$

Wir berechnen die Nullstelle von f' mit dem Produkt-Null-Satz:

$$f'(x) = 0 \iff 2 \cdot \ln(x) + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x} = 0$$

Die erste Gleichung hat die Lösung $x_3 = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}607$. Die zweite Gleichung hat keine Lösung.

3) Wir ermitteln f'' mit der Produktregel:

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + [2 \cdot \ln(x) + 1] \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot [1 - 2 \cdot \ln(x)]$$

Die einzige Nullstelle von f'' ist also $x_4 = e^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}649$. $\square$

Aufgabe 5. Du hast einen Vorrat an gewöhnlichen Spielwürfeln, also faire 6-seitige Würfel mit den Augenzahlen von 1 bis 6.

1) Du würfelst mit einem Spielwürfel.
Die Zufallsvariable X_1 gibt die gewürfelte Augenzahl an.
Trage die Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein, und berechne den Erwartungswert $E(X_1)$.

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2) Du würfelst mit 2 Spielwürfeln.
Die Zufallsvariable X_2 gibt die größere der beiden gewürfelten Augenzahlen an.
Trage die Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein, und berechne den Erwartungswert $E(X_2)$.

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_2 = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

3) ☆ Du würfelst mit n Spielwürfeln.
Die Zufallsvariable X_n gibt die größte der n gewürfelten Augenzahlen an.
Stelle mithilfe von n eine Formel für den Erwartungswert $E(X_n)$ auf.
Hinweis: $\sum_{k=1}^{6} k \cdot P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{6} P(X_n \geq k) = \sum_{k=1}^{6} [1 - P(X_n < k)]$
Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} E(X_n) = 6$ gilt.

Lösung.

1) Da der Würfel fair ist, hat jede Augenzahl die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ und damit gilt:

$$E(X_1) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

2) Da die Würfel fair sind, hat jedes der folgenden 36 Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit:

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3	4	5	6
⚁	2	2	3	4	5	6
⚂	3	3	3	4	5	6
⚃	4	4	4	4	5	6
⚄	5	5	5	5	5	6
⚅	6	6	6	6	6	6

Für den Erwartungswert von X_2 gilt damit:

$$E(X_2) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = 4{,}47...$$

3) Da die Würfel fair sind, hat jede der 6^n möglichen Wurffolgen die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6^n}$.
Es gilt $X_n < k$ genau dann wenn jede der n Augenzahlen kleiner als k sind.
Da es $(k-1)^n$ solcher Wurffolgen gibt, folgt:

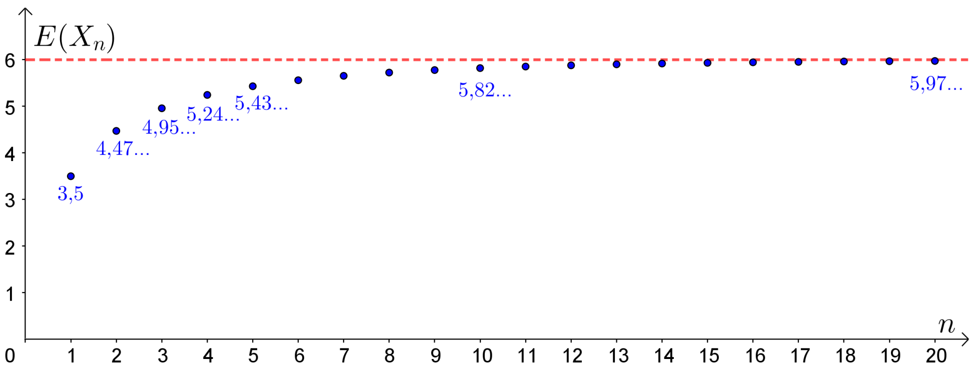
$$P(X_n < k) = \frac{(k-1)^n}{6^n} = \left(\frac{k-1}{6}\right)^n$$

Für den Erwartungswert von X_n gilt damit:

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=1}^{6} k \cdot P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{6} P(X_n \geq k) = \\ &= \sum_{k=1}^{6} [1 - P(X_n < k)] = 6 - \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{k-1}{6}\right)^n = \\ &= 6 - \left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n \end{aligned}$$

Da die Basis der Potenzen jeweils betragsmäßig kleiner als 1 ist, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = 6 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 = 6$$



□