Name: ____________________________ Matrikelnummer: ____________________

1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
– Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
– Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}-\sqrt{2\cdot x+21}=0$$

Lösung.

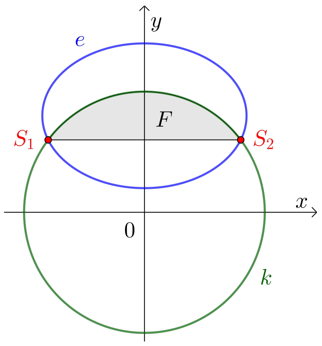
$$\begin{aligned}
\iff\quad & \sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}=\sqrt{2\cdot x+21}\\
\implies\quad & x+2+2\cdot\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-5}+x-5=2\cdot x+21\\
\iff\quad & \sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-5}=12\\
\implies\quad & (x+2)\cdot(x-5)=144\\
\iff\quad & \underbrace{x^2-3\cdot x-154}_{=(x+11)\cdot(x-14)}=0\\
\iff\quad & x=-11\quad\text{oder}\quad x=14
\end{aligned}$$

Probe: Der Ausdruck $\sqrt{x+2}$ ist nur für $x\geq -2$ definiert.
Also kann $x=-11$ keine Lösung sein.
Für $x=14$ sind alle Ausdrücke definiert und es gilt:

$$\sqrt{14+2}+\sqrt{14-5}-\sqrt{2\cdot 14+21}=4+3-7=0\ \checkmark$$

Die Gleichung hat also die Lösungsmenge $L=\{14\}$. □

Aufgabe 2. Der Kreis k und die Ellipse e mit



$$k\colon\ x^2 + y^2 = 25 \qquad\qquad e\colon\ x^2 + 2\cdot(y-4)^2 = 18$$

schneiden einander in 2 Punkten.

1) Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2.

2) Berechne den Inhalt F der grau markierten Fläche.

Lösung.

1) Wir multiplizieren aus und vereinfachen:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + 2\cdot y^2 - 16\cdot y = -14 \end{cases}$$

Wir subtrahieren die obere Gleichung von der unteren Gleichung:

$$y^2 - 16\cdot y = -39 \iff \underbrace{y^2 - 16\cdot y + 39}_{=(y-3)\cdot(y-13)} = 0 \iff y = 3 \quad \text{oder} \quad y = 13$$

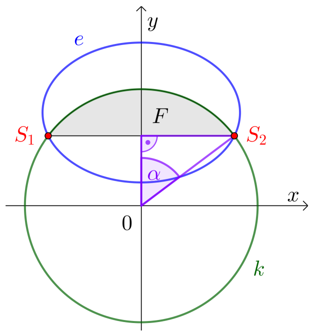
Wir setzen die beiden Lösungskandidaten in die erste Gleichung ein:

$$x^2 + 3^2 = 25 \iff x^2 = 16 \iff x = -4 \quad \text{oder} \quad x = 4$$

$$x^2 + 13^2 = 25 \iff x^2 = -144 \quad \text{keine Lösung in } \mathbb{R}$$

Das Gleichungssystem hat also die 2 Lösungen $S_1 = (-4 \mid 3)$ und $S_2 = (4 \mid 3)$.

2) Für den im rechtwinkeligen Dreieck eingezeichneten Winkel α gilt: $\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}13...^\circ$



Dieses rechtwinkelige Dreieck hat den Flächeninhalt $F_1 = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$.

Der Kreissektor mit Radius $r = 5$ und Zentriwinkel α hat den Flächeninhalt $F_2 = \frac{\pi\cdot 5^2\cdot\alpha}{360} = 11{,}59...$.

Für den gesuchten Flächeninhalt gilt also:

$$F = 2\cdot(F_2 - F_1) = 11{,}18...$$

□

Aufgabe 3. Für die Funktion f gilt: $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

1) Zeige mithilfe der Ableitungsregeln, dass $f'(x) = \tan^2(x) + 1$ gilt.
2) Zeige mithilfe der Ableitungsregeln, dass $f''(x) = 2 \cdot \tan^3(x) + 2 \cdot \tan(x)$ gilt.
3) Ermittle reelle Zahlen a, b und c so, dass $f'''(x) = a \cdot \tan^4(x) + b \cdot \tan^2(x) + c$ gilt.
4) ☆ Für die 42. Ableitung von f gilt:

$$f^{(42)}(x) = k_{43} \cdot \tan^{43}(x) + k_{41} \cdot \tan^{41}(x) + k_{39} \cdot \tan^{39}(x) + \cdots + k_1 \cdot \tan^1(x) \quad \text{mit } k_i \in \mathbb{R}$$

Ermittle den Koeffizienten k_{43}.

Lösung.

1) Wir ermitteln f' mit der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

2) Wir ermitteln f'' mit **1)** und der Kettenregel:

$$f''(x) = 2 \cdot \tan(x) \cdot \tan'(x) = 2 \cdot \tan(x) \cdot [\tan^2(x) + 1] = 2 \cdot \tan^3(x) + 2 \cdot \tan(x)$$

3) Wir ermitteln f''' mit **1)**, **2)** und der Kettenregel:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 6 \cdot \tan^2(x) \cdot \tan'(x) + 2 \cdot \tan'(x) = \\ &= 6 \cdot \tan^2(x) \cdot [\tan^2(x) + 1] + 2 \cdot [\tan^2(x) + 1] = \\ &= 6 \cdot \tan^4(x) + 8 \cdot \tan^2(x) + 2 \end{aligned}$$

$\implies a = 6,\ b = 8,\ c = 2$

4) Aus der Kettenregel und **1)** folgt für alle $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} [\tan^n(x)]' &= n \cdot \tan^{n-1}(x) \cdot \tan'(x) = n \cdot \tan^{n-1}(x) \cdot [\tan^2(x) + 1] = \\ &= n \cdot \tan^{n+1}(x) + n \cdot \tan^{n-1}(x) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass der größte auftretende Exponent mit jeder Ableitung um 1 größer wird, und dass für den zugehörigen Koeffizienten in $f^{(42)}$ gilt:

$$k_{43} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 42 = 42!$$

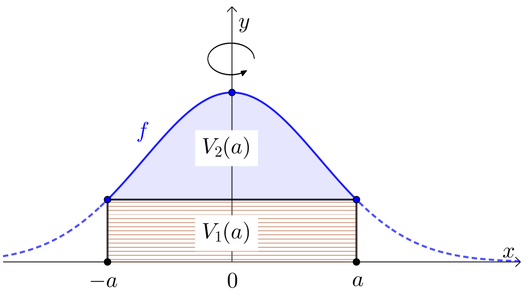
$\square$

Aufgabe 4. Für die Funktion G gilt: $G(x) = x \cdot \ln(x) - x$

1) Zeige mithilfe der Ableitungsregeln, dass $G'(x) = \ln(x)$ gilt.

Für die Funktion f gilt: $f(x) = e^{-x^2}$
Der Teil des Funktionsgraphen von f mit $-a \leq x \leq a$ sowie die im Bild unten senkrecht eingezeichneten Strecken mit $x = \pm a$ rotieren um die y-Achse.

2) Stelle mithilfe von $a > 0$ eine Formel für das markierte Rotationsvolumen $V_1(a)$ auf.
3) Stelle mithilfe von $a > 0$ eine Formel für das markierte Rotationsvolumen $V_2(a)$ auf.
4) Vereinfache $V(a) = V_1(a) + V_2(a)$ so weit wie möglich.
5) Ermittle den Grenzwert $V = \lim\limits_{a \to \infty} V(a)$.



Lösung.

1) Aus der Produktregel folgt: $G'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$ ✓
2) Der Rotationskörper ist ein Drehzylinder mit Radius a und Höhe $f(a) = e^{-a^2}$. Daraus folgt:

$$V_1(a) = \pi \cdot a^2 \cdot e^{-a^2}$$

3) Für alle y mit $e^{-a^2} \leq y \leq 1$ gilt:

$$y = e^{-x^2} \iff \ln(y) = -x^2 \iff x^2 = -\ln(y)$$

Für das Rotationsvolumen $V_2(a)$ gilt also:

$$\begin{aligned} V_2(a) &= \pi \cdot \int_{e^{-a^2}}^{1} -\ln(y)\,\mathrm{d}y \overset{\mathbf{1)}}{=} \pi \cdot [-y \cdot \ln(y) + y] \Big|_{e^{-a^2}}^{1} = \\ &= \pi \cdot \left[1 + e^{-a^2} \cdot (-a^2) - e^{-a^2}\right] = \\ &= \pi - \pi \cdot a^2 \cdot e^{-a^2} - \pi \cdot e^{-a^2} \end{aligned}$$

4) Damit gilt:

$$V(a) = V_1(a) + V_2(a) = \pi - \pi \cdot e^{-a^2}$$

5) Damit gilt:

$$V = \lim_{a \to \infty} V(a) = \pi - \pi \cdot 0 = \pi$$

□

Aufgabe 5. Beim Glücksspiel „Lotto 6 aus 45“ gibt es 45 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 45 nummeriert sind.
Mit einem Lotto-Tipp entscheidet man sich für 6 von diesen 45 Zahlen. Zum Beispiel: $\{3, 6, 23, 26, 37, 42\}$
Bei einer Lotto-Ziehung werden 6 der 45 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und aufsteigend sortiert. Stimmen die Zahlen auf den 6 gezogenen Kugeln mit den 6 getippten Zahlen überein, gewinnt man den Hauptpreis.

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man mit einem Lotto-Tipp den Hauptpreis gewinnt.
Gib die Wahrscheinlichkeit als Verhältnis „1 zu ...“ an.

Das Glücksspiel „Lotto 2 aus n“ läuft nach dem gleichen Prinzip ab. Man gewinnt den Hauptpreis, wenn die beiden Zahlen auf den gezogenen Kugeln mit den beiden getippten Zahlen übereinstimmen.

2) Berechne die kleinste natürliche Zahl $n \geq 2$, bei der die Wahrscheinlichkeit für den Hauptpreis in „Lotto 2 aus n“ kleiner als für den Hauptpreis in „Lotto 6 aus 45“ ist.

Lösung.

1) Es gibt $\binom{45}{6} = 8\,145\,060$ verschiedene Möglichkeiten, um aus den 45 Zahlen eine Menge von 6 Zahlen auszuwählen. Da jede dieser Möglichkeiten die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, ist die Wahrscheinlichkeit für den Hauptpreis $\frac{1}{8\,145\,060}$ bzw. „1 zu 8 145 060“ .

2) Es gibt $\binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$ verschiedene Möglichkeiten, um aus den n Zahlen eine Menge von 2 Zahlen auszuwählen. Wir lösen die folgende Ungleichung:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} > 8\,145\,060 \iff \underbrace{n^2 - n - 16\,290\,120}_{=f(n)} > 0$$

Die Funktion f ist eine quadratische Funktion, deren Graph eine nach oben offene Parabel ist. Wir berechnen ihre Nullstellen mit der kleinen Lösungsformel:

$$n_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 16\,290\,120} \implies (n_1 = -4035{,}6\ldots) \quad n_2 = 4036{,}6\ldots$$

Die kleinste natürliche Zahl $n \geq 2$, bei der die Wahrscheinlichkeit für den Hauptpreis in „Lotto 2 aus n“ kleiner als für den Hauptpreis in „Lotto 6 aus 45“ ist, lautet also $n = 4037$.

□