Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

1. Hinweise

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne $\bigstar$ - Bonuspunkte).
- Die mit $\bigstar$ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Es gibt zwei Werte für den Parameter $a \in \mathbb{R}$, sodass die Gleichung

$$\sqrt{a \cdot x} = 3 \cdot x + 2$$

genau eine Lösung x über der Grundmenge $\mathbb{R}$ hat.

a) Berechne diese beiden Werte für den Parameter a.

b) Berechne für diese beiden Parameterwerte die jeweils eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Für die Funktionen sinh (Sinus Hyperbolicus) bzw. g gilt:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{bzw.} \quad g(x) = \frac{e^x}{2}$$

a) Trage einen richtigen Term in das Kästchen ein und begründe, warum die Funktion sinh nur eine einzige Nullstelle hat.

$$\sinh(x) = \frac{e^x \cdot \left(\boxed{} \right)}{2}$$

b) Ermittle das asymptotische Verhalten von $x \mapsto \dfrac{\sinh(x)}{g(x)}$, also folgenden Grenzwert: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sinh(x)}{g(x)}$

c) Ermittle jene Stammfunktion F von sinh, die $F(0) = 1$ erfüllt.

d) Berechne $\displaystyle\int_0^1 \sinh(x)\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 3. Für die Geraden g und h_a im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

$$h_a\colon X = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

a) Begründe, warum es keinen Wert $a \in \mathbb{R}$ gibt, für den die beiden Geraden g und h_a parallel sind.

b) Berechne jenen Wert $a \in \mathbb{R}$, für den die Geraden g und h_a einander in genau einem Punkt P schneiden, und berechne diesen Schnittpunkt P.

Aufgabe 4. Ein Online-Casino hat das folgende Angebot:

„Kaufe Spiel-Jetons im Wert von 100 € und bezahle nur 85 €!“

Bevor die Spiel-Jetons wieder zurück in Geld umgewandelt werden dürfen, müssen sie mindestens einmal bei einem Glücksspiel eingesetzt werden.
Beim Glücksspiel Roulette tritt genau eines von 3 möglichen Farbergebnissen ein:

i) Farbe Rot (Wahrscheinlichkeit $\frac{18}{37}$): Setzt man Spiel-Jetons auf die Farbe Rot, erhält man beim Ergebnis „Rot“ den doppelten Einsatz als Spiel-Jetons zurück.

ii) Farbe Schwarz (Wahrscheinlichkeit $\frac{18}{37}$): Setzt man Spiel-Jetons auf die Farbe Schwarz, erhält man beim Ergebnis „Schwarz“ den doppelten Einsatz als Spiel-Jetons zurück.

iii) Farbe Grün (Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{37}$): Setzt man Spiel-Jetons auf die Farbe Grün, erhält man beim Ergebnis „Grün“ den 36-fachen Einsatz als Spiel-Jetons zurück.

Sophia kauft Spiel-Jetons im Wert von 100 € und bezahlt dafür 85 €.
Sophia setzt bei einem einzigen Roulette-Spiel alle Spiel-Jetons auf die Farbe Grün.
Die Zufallsvariable X gibt Sophias Gewinn (nach Abzug der bezahlten 85 €) an.

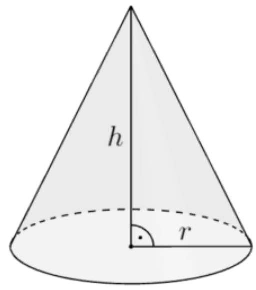
a) Berechne den Erwartungswert von X.

Till kauft Spiel-Jetons im Wert von 100 € und bezahlt dafür 85 €.
Till möchte bei einem einzigen Roulette-Spiel alle Spiel-Jetons so auf die Farben Rot, Schwarz und Grün aufteilen, dass er danach *sicher* Spiel-Jetons im Wert von A € hat. Dafür setzt er jeweils Spiel-Jetons im Wert von r € auf Rot, s € auf Schwarz und g € auf Grün.

b) Stelle ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung von r, s und g auf.

c) Löse das Gleichungssystem und berechne Tills sicheren Gewinn (nach Abzug der bezahlten 85 €).

Aufgabe 5. Das Volumen V und der Oberflächeninhalt O eines Drehkegels hängen von seinem Radius r und seiner Höhe h ab:



$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

$$O = \pi \cdot r \cdot (r + \sqrt{r^2 + h^2})$$

Der Oberflächeninhalt eines bestimmten Drehkegels beträgt $42\,\text{cm}^2$.

a) Stelle mithilfe von r eine Formel für das Volumen $V(r)$ des Drehkegels auf.

$V(r) =$ $\boxed{}$ (r in cm, $V(r)$ in cm^3)

Das Volumen des Drehkegels soll so groß wie möglich sein. Man kann zeigen, dass $V(r)$ den größten Funktionswert an der gleichen Stelle r^* annimmt wie die Funktion f, für die gilt:

$$f(r) = \frac{42}{\pi} \cdot r^2 - 2 \cdot r^4$$

b) Ermittle die Ableitungsfunktion f' und ihre positive Nullstelle r^*.

c) Zeige, dass f an der Stelle r^* ein lokales Maximum hat.

d) ☆ Begründe, warum $V(r)$ und $f(r)$ tatsächlich an der gleichen Stelle den jeweils größten Funktionswert annehmen.