

1. HINWEISE

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
- Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Wähle am Ende, welche 4 der 5 Aufgaben zur Beurteilung herangezogen werden sollen:
 Aufgabe 1 Aufgabe 2 Aufgabe 3 Aufgabe 4 Aufgabe 5

2. AUFGABEN

Aufgabe 1. Löse die Gleichung

$$\frac{4^{2 \cdot x^2 + 5 \cdot x}}{2^{2 \cdot x + 9}} = 8^{x^2 + 2 \cdot x - 2}$$

über der Grundmenge \mathbb{R} .

Aufgabe 2. Löse die Gleichung

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-3} - \sqrt{2 \cdot x + 25} = 0$$

über der Grundmenge \mathbb{R} .

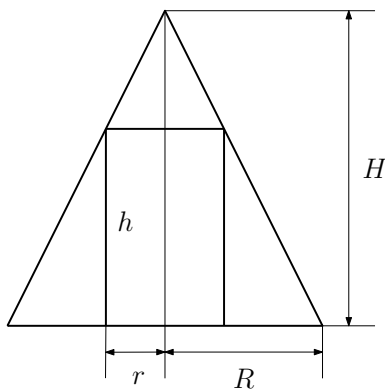
Aufgabe 3. Es gibt eine quadratische Funktion f mit den folgenden beiden Eigenschaften:

i) $2 \cdot x - y = -6$ ist eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$.

ii) $\int_0^1 f(x) \, dx = 8$

Ermittle die Gleichung von f .

Aufgabe 4. Einem Drehkegel mit Radius $R = 42$ cm und Höhe $H = 126$ cm werden Drehzylinder wie im Bild eingeschrieben. Gesucht sind die Abmessungen jenes Drehzylinders mit maximalem Volumen.



r ist der Zylinderradius in cm.

$V(r)$ ist das Zylindervolumen in cm^3 .

1) Zeige, dass

$$V(r) = 126 \cdot \pi \cdot r^2 - 3 \cdot \pi \cdot r^3$$

gilt.

2) Ermittle das Monotonieverhalten von V in $]0; 42[$.

3) Ermittle den Radius und die Höhe jenes Drehzylinders mit maximalem Volumen.

Aufgabe 5. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

a) Zeige, dass $f'(x) = x \cdot (2 - x) \cdot e^{-x}$ gilt.

Dokumentiere dabei die Verwendung von Ableitungsregeln sorgfältig.

b) Ermittle die Nullstellen der Funktion f' .

c) Diskutiere das Monotonieverhalten der Funktion f .

d) Zeige, dass es Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot e^{-x}$$

eine Stammfunktion von f ist. Welche Werte haben die Zahlen a, b und c mit dieser Eigenschaft?

e) ★ Begründe sorgfältig, dass die Gleichung

$$x^2 = \frac{1}{2} \cdot e^x$$

genau drei Lösungen über der Grundmenge \mathbb{R} hat.

Tipp: Verwende das Monotonieverhalten von f und den Zwischenwertsatz.