Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ☆ - Bonuspunkte).
– Die mit ☆ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
– Wähle am Ende, welche 4 der 5 Aufgaben zur Beurteilung herangezogen werden sollen:

☐ Aufgabe 1 ☐ Aufgabe 2 ☐ Aufgabe 3 ☐ Aufgabe 4 ☐ Aufgabe 5

2. Aufgaben

Aufgabe 1. f ist eine Polynomfunktion von Grad 3.
Das Monotonieverhalten von f ändert sich an den Stellen $x = -2$ und $x = 3$.
Die Tangente an den Graphen hat an der Stelle $x = 0$ die Gleichung $36 \cdot x + y = 42$.
Ermittle eine Gleichung von f.

Lösung. f' ist eine quadratische Funktion mit Nullstellen -2 und 3.

$$\implies f'(x) = a \cdot (x+2) \cdot (x-3) = a \cdot x^2 - a \cdot x - 6 \cdot a$$

Für die Tangente an der Stelle $x = 0$ gilt: $y = \underbrace{-36}_{=f'(0)} \cdot x \underbrace{+\,42}_{=f(0)}$

$$\implies f'(0) = -36 \implies -6 \cdot a = -36 \implies a = 6$$

$$f'(x) = 6 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 36 \implies f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 36 \cdot x + d$$

$$f(0) = 42 \implies f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 42$$

Alternativer Lösungsweg: Lineares Gleichungssystem lösen

$$\mathrm{I}: f'(-2) = 0 \qquad \mathrm{II}: f'(3) = 0 \qquad \mathrm{III}: f'(0) = -36 \qquad \mathrm{IV}: f(0) = 42$$ □

Aufgabe 2. Die Funktion g mit

$$g(x) = \ln\left(-x^2 + 3 \cdot x + 10\right)$$

ist *nicht* für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

1) Ermittle die größtmögliche Definitionsmenge von g.
2) Ermittle das Monotonieverhalten von g.
3) Ermittle das Krümmungsverhalten von g.

Lösung.

1) $\ln(☺)$ ist genau für $☺ > 0$ definiert.

$$-x^2 + 3 \cdot x + 10 = 0 \iff x^2 - 3 \cdot x - 10 = 0 \iff (x-5) \cdot (x+2) = 0$$

$x \mapsto -x^2 + 3 \cdot x + 10$ ist also eine negativ gekrümmte quadratische Funktion mit den beiden Nullstellen $x_1 = 5$ und $x_2 = -2$.
Die größtmögliche Definitionsmenge von g ist damit $]-2; 5[$.

2) Wir berechnen die Ableitung von g mit der Kettenregel:

$$g'(x) = \frac{-2 \cdot x + 3}{-x^2 + 3 \cdot x + 10}$$

Wir berechnen die Nullstellen von g':

$$g'(x) = 0 \iff -2 \cdot x + 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$$

Wir ermitteln das Monotonieverhalten von g:

	$-2 < x < \frac{3}{2}$	$x = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x < 5$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$\ln\left(\frac{49}{4}\right)$	$\searrow$

3) Wir berechnen die Ableitung von g' mit der Quotientenregel:

$$g''(x) = \frac{-2 \cdot (-x^2 + 3 \cdot x + 10) - (-2 \cdot x + 3) \cdot (-2 \cdot x + 3)}{(-x^2 + 3 \cdot x + 10)^2}$$

Wir berechnen die Nullstellen von g'':

$$g''(x) = 0 \iff 2 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 20 - 4 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 9 = 0 \iff -2 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 29 = 0$$

$g''(x) = 0$ hat keine Lösungen in $\mathbb{R}$ und es gilt $g''(0) < 0$.
Da g'' stetig auf $]-2; 5[$ ist, gilt $g''(x) < 0$ für alle $x \in]-2; 5[$.
g ist also für alle $x \in]-2; 5[$ negativ gekrümmt. $\square$

Aufgabe 3. Zerlege das Polynom

$$4 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 29 \cdot x + 21$$

in Linearfaktoren.

Lösung. Ganzzahlige Nullstellen müssen ganzzahlige Teiler von 21 sein, also ± 1, ± 3, ± 7, ± 21. Durch Probieren finden wir die Nullstelle $x_1 = 1$. Es gilt also:

$$4 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 29 \cdot x + 21 = 4 \cdot (x - 1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

Wir dividieren beide Seiten durch den Linearfaktor $(x - 1)$:

$$\begin{array}{l}
\ominus \begin{cases} (4 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 29 \cdot x + 21) : (x-1) = 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 21 \\ 4 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 \end{cases} \\
\hline
\qquad \ominus \begin{cases} 8 \cdot x^2 - 29 \cdot x + 21 \\ 8 \cdot x^2 - 8 \cdot x \end{cases} \\
\hline
\qquad\qquad \ominus \begin{cases} -21 \cdot x + 21 \\ -21 \cdot x + 21 \end{cases} \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

Die anderen beiden Nullstellen x_2 und x_3 sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$4 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 21 = 0,$$

also

$$x_{2,3} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{8} = \frac{-8 \pm 20}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = \frac{3}{2},\ x_3 = -\frac{7}{2}$$

Die gesuchte Zerlegung in Linearfaktoren ist also

$$4 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 29 \cdot x + 21 = 4 \cdot (x - 1) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{7}{2}\right).$$

□

Aufgabe 4. Die Gerade g und die Ellipse e schneiden einander in 2 Punkten.

$$g\colon\ 2\cdot x-3\cdot y=2 \qquad\qquad e\colon\ 3\cdot x^2-6\cdot x+4\cdot y^2=40$$

Berechne die Entfernung zwischen den beiden Schnittpunkten.

Lösung. Die Schnittpunkte sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}:&\quad 2\cdot x-3\cdot y=2 \implies y=\frac{2\cdot x-2}{3}\\ \mathrm{II}:&\quad 3\cdot x^2-6\cdot x+4\cdot y^2=40 \end{aligned}$$

Wir setzen in Gleichung II ein und formen um:

$$\begin{aligned} 3\cdot x^2-6\cdot x+4\cdot\left(\frac{2\cdot x-2}{3}\right)^2&=40\\ 3\cdot x^2-6\cdot x+4\cdot\left(\frac{4\cdot x^2-8\cdot x+4}{9}\right)&=40\\ 27\cdot x^2-54\cdot x+16\cdot x^2-32\cdot x+16&=360\\ 43\cdot x^2-86\cdot x-344&=0\\ \underbrace{x^2-2\cdot x-8}_{=(x-4)\cdot(x+2)}&=0 \end{aligned}$$

Einsetzen in I liefert die Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} x_1&=4 &&\implies y_1=\frac{2\cdot 4-2}{3}=2 &&\implies S_1=(4\mid 2)\\ x_2&=-2 &&\implies y_2=\frac{2\cdot(-2)-2}{3}=-2 &&\implies S_2=(-2\mid -2) \end{aligned}$$

Der Satz von Pythagoras liefert die Entfernung zwischen den beiden Punkten:

$$\sqrt{(4-(-2))^2+(2-(-2))^2}=\sqrt{52}$$

□

Aufgabe 5. $f(x) = x^2 - 8 \cdot x + 18$

1) Berechne alle Stellen s im Intervall $[1; 7]$ mit

$$f(s) \cdot 6 = \int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2) ☆ Allgemein gibt es für jede stetige Funktion f und jedes Intervall $[a; b]$ mit $a < b$ (mindestens) eine Stelle $s \in [a; b]$ mit

$$f(s) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweise diesen **Mittelwertsatz der Integralrechnung**.

Du darfst dafür den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sowie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung verwenden.

Lösung.

1) Wir ermitteln eine Stammfunktion F von f:

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 + 18 \cdot x$$

Wir berechnen das bestimmte Integral mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x = F(7) - F(1) = 44{,}33... - 14{,}33... = 30$$

Wir lösen die quadratische Gleichung:

$$f(s) \cdot 6 = \int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x \iff s^2 - 8 \cdot s + 18 = 5 \iff s^2 - 8 \cdot s + 13 = 0$$
$$\iff s = 4 \pm \sqrt{3}$$

Beide Stellen $s_1 = 4 + \sqrt{3}$ und $s_2 = 4 - \sqrt{3}$ liegen im Intervall $[1; 7]$.

2) Da f stetig ist, liefert der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine differenzierbare Funktion F mit

$$\textbf{i)}\ F' = f \quad \text{und} \quad \textbf{ii)}\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die Funktion F im Intervall $[a; b]$ an. Dieser garantiert (mindestens) eine Stelle $s \in [a; b]$ so, dass

$$F'(s) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

gilt. Wir multiplizieren beide Seiten mit $(b - a)$ und verwenden **i)** bzw. **ii)**:

$$F'(s) \cdot (b - a) = F(b) - F(a) \implies f(s) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \square$$