

Summenregel, Differenzregel & Faktorregel



Für alle differenzierbaren Funktionen  $f$  und  $g$  gelten die folgenden Ableitungsregeln:

**Summenregel:**  $s(x) = f(x) + g(x) \implies s'(x) = f'(x) + g'(x)$

**Differenzregel:**  $d(x) = f(x) - g(x) \implies d'(x) = f'(x) - g'(x)$

**Faktorregel:**  $m(x) = c \cdot f(x) \implies m'(x) = c \cdot f'(x)$  mit  $c \in \mathbb{R}$

Differenzieren mit Ableitungsregeln



Wir haben die folgende Ableitungsfunktion direkt aus der Definition ermittelt:

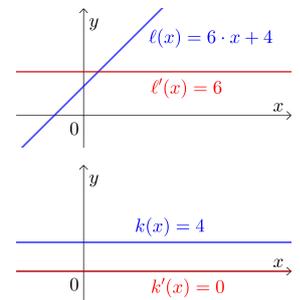
$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4 \implies f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dots = 6 \cdot x + 6$$

Mit den Ableitungsregeln und  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$  können wir diese Ableitungsfunktion direkt ermitteln:

$$f'(x) = (3 \cdot x^2)' + (6 \cdot x + 4)' = 3 \cdot (x^2)' + 6 = 6 \cdot x + 6$$

Rechts sind die folgenden beiden Begründungen für  $(6 \cdot x + 4)' = 6$  grafisch veranschaulicht:

- i) Die lineare Funktion  $\ell$  mit  $\ell(x) = 6 \cdot x + 4$  hat an jeder Stelle die Steigung 6.  $\implies \ell'(x) = 6$
- ii) Die konstante Funktion  $k$  mit  $k(x) = 4$  hat an jeder Stelle die Steigung 0.  $\implies k'(x) = 0$   
 $\implies (6 \cdot x + 4)' = 6 \cdot (x^1)' + (4)' = 6 \cdot 1 \cdot x^0 + 0 = 6$



Ableitungen von Polynomfunktionen



Ermittle jeweils die Ableitungsfunktion der Polynomfunktion mithilfe der Ableitungsregeln.

a)  $a(x) = 6 \cdot x^7 + 5 \cdot x^3 \implies a'(x) =$

b)  $b(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + x^2 - 3 \cdot x + 5 \implies b'(x) =$

c)  $c(x) = \frac{5}{3} \cdot x^7 - \frac{3}{8} \cdot x^4 + \frac{1}{4} \cdot x^2 - 3 \implies c'(x) =$

d)  $d(x) = -\frac{3}{2} \cdot x^6 + x^3 - x \implies d'(x) =$

Faktorregel



Patrick meint: „Die Ableitung von  $x^2$  ist  $2 \cdot x$  und die Ableitung von  $x^3$  ist  $3 \cdot x^2$ .

Also ist die Ableitung von  $x^2 \cdot x^3$  gleich  $(2 \cdot x) \cdot (3 \cdot x^2) = 6 \cdot x^3$ .“

Begründe, warum diese Aussage falsch sein muss.

## Ableitungen von Potenz- und Wurzelfunktionen



MmF

Für die Ableitungsfunktion der **Potenzfunktion**  $f(x) = x^r$  mit  $r \in \mathbb{R}$  gilt:  $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

**Erinnere** dich, dass  $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$  bzw.  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$  gilt.

Diese Ableitungsregel kannst du also auch auf alle Wurzelfunktionen anwenden.

## Ableitungen von Potenz- und Wurzelfunktionen



MmF

Ermittle jeweils die Ableitungsfunktion mithilfe der Ableitungsregeln.

a)  $a(x) = x^\pi$    b)  $b(x) = \frac{5}{x^2}$    c)  $c(x) = \frac{2}{3 \cdot x}$    d)  $d(x) = \sqrt{x}$    e)  $e(x) = \sqrt[4]{x^3}$

## Ableitungen von Exponential- und Logarithmusfunktionen



MmF

Für die Ableitungsfunktion der **Exponentialfunktion**  $f(x) = a^x$  gilt:  $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$

Für die Ableitungsfunktion der **Logarithmusfunktion**  $g(x) = \log_a(x)$  gilt:  $g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

Basis  $e$ 

MmF

Wenn die Basis  $a$  die **Eulersche Zahl**  $e = 2,71828\dots$  ist, dann gilt also:

$$f(x) = e^x \implies f'(x) = \boxed{\phantom{e^x}}$$

$$g(x) = \ln(x) \implies g'(x) = \boxed{\phantom{\frac{1}{x}}}$$

## Ableitungen von Exponential- und Logarithmusfunktionen



MmF

Ermittle jeweils die Ableitungsfunktion mithilfe der Ableitungsregeln.

a)  $f(x) = 4 \cdot e^x - 5 \cdot x^e + \frac{2}{3} \cdot \ln(x)$    b)  $g(x) = 4 \cdot 2^x - \frac{5}{3^x} + \lg(x)$

Ableitungen von Winkelfunktionen

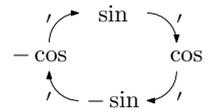


MmF

Für die Ableitungsfunktion von  $f(x) = \sin(x)$  gilt:  $f'(x) = \cos(x)$

Für die Ableitungsfunktion von  $g(x) = \cos(x)$  gilt:  $g'(x) = -\sin(x)$

Für die Ableitungsfunktion von  $h(x) = \tan(x)$  gilt:  $h'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$



Damit diese Ableitungsregeln für **Winkelfunktionen** stimmen, muss der Winkel  $x$  im **Bogenmaß** gemessen sein.

Ableitungen von Winkelfunktionen



MmF

Ermittle die Ableitungsfunktion von  $f(x) = 0,2 \cdot \sin(x) - \frac{\cos(x)}{3} + \frac{4 \cdot \sin(x)}{\cos(x)}$ .

Produktregel, Quotientenregel & Kettenregel



MmF

Die Ableitungsfunktion von  $p(x) = x^2 \cdot \sin(x)$  ist *nicht*  $x \mapsto 2 \cdot x \cdot \cos(x)$ .

Die Ableitungsfunktion von  $q(x) = \frac{x^2}{\sin(x)}$  ist *nicht*  $x \mapsto \frac{2 \cdot x}{\cos(x)}$ .

Die Ableitungsfunktion von  $k(x) = \sin(x^2)$  ist *nicht*  $x \mapsto \cos(2 \cdot x)$ .

Die *richtigen* Ableitungsfunktionen erhalten wir mit der Produkt-, Quotienten- bzw. Kettenregel.

Produktregel



MmF

Die Ableitungsfunktion von  $p(x) = a(x) \cdot b(x)$  ermitteln wir mit der **Produktregel**:

$$p'(x) = a'(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot b'(x)$$

Zum Beispiel:  $p(x) = \underbrace{x^2}_{a(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{b(x)} \implies p'(x) = \underbrace{2 \cdot x}_{a'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{b(x)} + \underbrace{x^2}_{a(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{b'(x)}$

Produktregel



MmF

Ermittle die Ableitungsfunktion von  $p(x) = 5 \cdot x^3 \cdot \ln(x) + 2 \cdot \cos(x) \cdot e^x$ .

Quotientenregel



MmF

Die Ableitungsfunktion von  $q(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$  ermitteln wir mit der **Quotientenregel**:

$$q'(x) = \frac{a'(x) \cdot b(x) - a(x) \cdot b'(x)}{b(x)^2}$$

Zum Beispiel:  $q(x) = \frac{x^2}{\sin(x)} \implies q'(x) = \frac{2 \cdot x \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$

Quotientenregel



MmF

Ermittle die Ableitungsfunktion von  $q(x) = \frac{3 \cdot x - 1}{x^2 + 1}$  und vereinfache so weit wie möglich.

Kettenregel



MmF

Die Ableitungsfunktion von  $k(x) = f(g(x))$  ermitteln wir mit der **Kettenregel**:

$$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Zum Beispiel:  $k(x) = \sin(x^2) \implies k'(x) = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x$

Bei dieser Funktion  $k$  steckt nämlich eine quadratische Funktion in der Sinusfunktion:

Innere Funktion:  $g(x) = x^2 \implies g'(x) = 2 \cdot x$

Äußere Funktion:  $f(\odot) = \sin(\odot) \implies f'(\odot) = \cos(\odot)$

$$k(x) = f(g(x)) = \sin(x^2) \implies k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x$$

Kettenregel



MmF

Ermittle die Ableitungsfunktion von  $k(x) = \ln(4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4)$ .

Drei Wege, ein Ziel



MmF

Ermittle die Ableitungsfunktion von  $f(x) = (4 \cdot x - 2)^2 \dots$

1) ... mit der Kettenregel. 2) ... mit der Produktregel. 3) ... indem du zuerst ausmultiplizierst.

