

Patrick behauptet: „Die **Ableitung** von x^2 ist $2 \cdot x$ und die Ableitung von x^3 ist $3 \cdot x^2$.

Also ist die Ableitung von $x^2 \cdot x^3$ gleich $(2 \cdot x) \cdot (3 \cdot x^2) = 6 \cdot x^3$.“

Begründe, warum diese Aussage *falsch* sein muss.

Es gilt $x^2 \cdot x^3 = x^5$ und damit $(x^2 \cdot x^3)' = (x^5)' = 5 \cdot x^4$.

Da im Allgemeinen $6 \cdot x^3 \neq 5 \cdot x^4$ gilt (z.B. an der Stelle $x = 1$), muss Patricks Aussage falsch sein.

Produktregel, Quotientenregel & Kettenregel



- Die Ableitungsfunktion von $p(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ ist *nicht* $x \mapsto 2 \cdot x \cdot \cos(x)$.
- Die Ableitungsfunktion von $q(x) = \frac{x^2}{\sin(x)}$ ist *nicht* $x \mapsto \frac{2 \cdot x}{\cos(x)}$.
- Die Ableitungsfunktion von $k(x) = \sin(x^2)$ ist *nicht* $x \mapsto \cos(2 \cdot x)$.

Die *richtigen* Ableitungsfunktionen erhalten wir mit der Produkt-, Quotienten- bzw. Kettenregel.

Produktregel



Die Ableitungsfunktion von $p(x) = a(x) \cdot b(x)$ ermitteln wir mit der **Produktregel**:

$$p'(x) = a'(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot b'(x)$$

$$\text{Zum Beispiel: } p(x) = \underbrace{x^2}_{a(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{b(x)} \implies p'(x) = \underbrace{2 \cdot x}_{a'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{b(x)} + \underbrace{x^2}_{a(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{b'(x)}$$

Produktregel



Ermittle die Ableitungsfunktion von $p(x) = 5 \cdot x^3 \cdot \ln(x)$.

$$p'(x) = 15 \cdot x^2 \cdot \ln(x) + 5 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x} = 15 \cdot x^2 \cdot \ln(x) + 5 \cdot x^2$$

Quotientenregel



Die Ableitungsfunktion von $q(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ermitteln wir mit der **Quotientenregel**:

$$q'(x) = \frac{a'(x) \cdot b(x) - a(x) \cdot b'(x)}{b(x)^2}$$

$$\text{Zum Beispiel: } q(x) = \frac{x^2}{\sin(x)} \implies q'(x) = \frac{2 \cdot x \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Quotientenregel



Ermittle die Ableitungsfunktion von $q(x) = \frac{3 \cdot x - 1}{x^2 + 1}$ und vereinfache so weit wie möglich.

$$q'(x) = \frac{3 \cdot (x^2 + 1) - (3 \cdot x - 1) \cdot 2 \cdot x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3 \cdot x^2 + 3 - 6 \cdot x^2 + 2 \cdot x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$



Die Ableitungsfunktion von $k(x) = f(g(x))$ ermitteln wir mit der **Kettenregel**:

$$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Zum Beispiel: $k(x) = \sin(x^2) \implies k'(x) = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x$

Bei dieser Funktion k steckt nämlich eine quadratische Funktion in der Sinusfunktion:

$$\text{Äußere Funktion: } f(\odot) = \sin(\odot) \implies f'(\odot) = \cos(\odot)$$

$$\text{Innere Funktion: } g(x) = x^2 \implies g'(x) = 2 \cdot x$$

$$k(x) = f(g(x)) = \sin(x^2) \implies k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x$$



Ermittle die Ableitungsfunktion von $k(x) = \ln(4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4)$.

$$k'(x) = \frac{1}{4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4} \cdot (8 \cdot x - 5) = \frac{8 \cdot x - 5}{4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4}$$



Ermittle die Ableitungsfunktion von $f(x) = (4 \cdot x - 2)^2 \dots$

1) ... mit der Kettenregel. 2) ... mit der Produktregel. 3) ... indem du zuerst ausmultiplizierst.

$$1) f(x) = (4 \cdot x - 2)^2 \leadsto \text{Kettenregel}$$

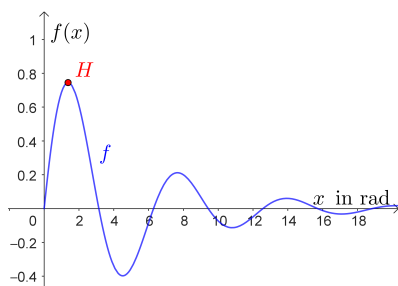
$$\implies f'(x) = 2 \cdot (4 \cdot x - 2)^1 \cdot 4 = 32 \cdot x - 16$$

$$2) f(x) = (4 \cdot x - 2) \cdot (4 \cdot x - 2) \leadsto \text{Produktregel}$$

$$\implies f'(x) = 4 \cdot (4 \cdot x - 2) + (4 \cdot x - 2) \cdot 4 = 16 \cdot x - 8 + 16 \cdot x - 8 = 32 \cdot x - 16$$

$$3) f(x) = 16 \cdot x^2 - 16 \cdot x + 4$$

$$\implies f'(x) = 32 \cdot x - 16$$



Für die links dargestellte Funktion f gilt: $f(x) = \sin(x) \cdot e^{-0,2 \cdot x}$

1) Ermittle die Ableitungsfunktion von f .

2) Berechne die Koordinaten vom eingezeichneten Hochpunkt H .

$$1) f'(x) = \cos(x) \cdot e^{-0,2 \cdot x} + \sin(x) \cdot e^{-0,2 \cdot x} \cdot (-0,2) = e^{-0,2 \cdot x} \cdot [\cos(x) - 0,2 \cdot \sin(x)]$$

2) Aus dem Produkt-Null-Satz und $e^{-0,2 \cdot x} > 0$ folgt:

$$f'(x) = 0 \iff \cos(x) - 0,2 \cdot \sin(x) = 0$$

Wir verwenden $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, um diese goniometrische Gleichung zu lösen:

$$\cos(x) - 0,2 \cdot \sin(x) = 0 \iff \cos(x) = 0,2 \cdot \sin(x) \iff \frac{1}{0,2} = \tan(x)$$

$$\implies x_H = \arctan\left(\frac{1}{0,2}\right) = 1,373 \dots \text{rad} \implies y_H = f(1,373 \dots) = 0,745 \dots$$

