

Ähnlichkeit

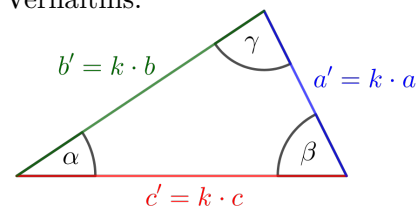
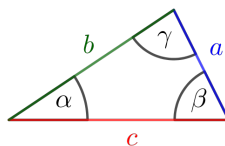


MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Zwei Dreiecke sind zueinander **ähnlich**, wenn ihre Winkel paarweise übereinstimmen.
In den beiden Dreiecken haben entsprechende Seitenlängen dasselbe Verhältnis:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

Die Zahl k nennen wir auch **Skalierungsfaktor**.



Zwei Winkel sind genug.



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die beiden dargestellten **rechtwinkligen** Dreiecke haben den gleichen spitzen Winkel α .
Der dritte Winkel β muss dann auch in beiden Dreiecken gleich groß sein. Warum?
Stelle mithilfe von α eine Formel zur Berechnung von β auf.

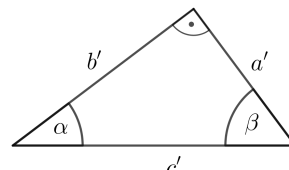
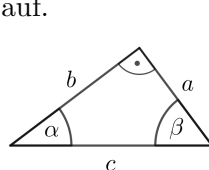
$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

Die beiden Dreiecke sind also zueinander ähnlich.

Zeige, dass aus $\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a}$ auch $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ folgt:

$$\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a} \iff c' \cdot a = a' \cdot c \iff \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \quad \checkmark$$

Kennt man von einem rechtwinkligen Dreieck einen spitzen Winkel,
dann ist also jedes Verhältnis von 2 Seitenlängen **eindeutig** festgelegt.



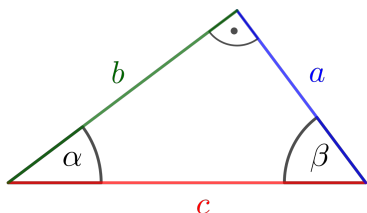
Winkelfunktionen



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die **Kathete** a liegt *gegenüber* von α . Sie heißt deshalb **Gegenkathete von α** .
Die **Kathete** b liegt *am* Winkel α *an*. Sie heißt deshalb **Ankathete von α** .

Die **Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens** ordnen jedem spitzen Winkel α
ein Seitenverhältnis im **rechtwinkligen** Dreieck mit Winkel α zu:



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \quad \text{„Sinus von } \alpha\text{“}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} \quad \text{„Cosinus von } \alpha\text{“}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{a}{b} \quad \text{„Tangens von } \alpha\text{“}$$

Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

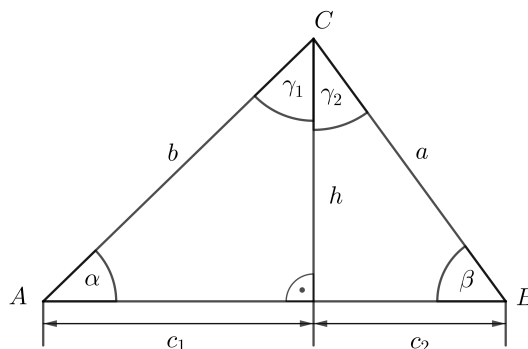
Das Dreieck ABC wird durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt.
Trage die richtigen Seitenlängen in die Lücken ein.

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{b} \quad \cos(\alpha) = \frac{c_1}{b} \quad \tan(\alpha) = \frac{h}{c_1}$$

$$\sin(\beta) = \frac{h}{a} \quad \cos(\beta) = \frac{c_2}{a} \quad \tan(\beta) = \frac{h}{c_2}$$

$$\sin(\gamma_1) = \frac{c_1}{b} \quad \cos(\gamma_1) = \frac{h}{b} \quad \tan(\gamma_1) = \frac{c_1}{h}$$

$$\sin(\gamma_2) = \frac{c_2}{a} \quad \cos(\gamma_2) = \frac{h}{a} \quad \tan(\gamma_2) = \frac{c_2}{h}$$





Grad	Sinus	Tangens	Secans
0	0,000000	0,000000	1,000000
1	0,017452	0,017538	1,000174
2	0,034901	0,034964	1,000349
3	0,052340	0,052359	1,000523
4	0,069756	0,069766	1,000698
5	0,087156	0,087166	1,000872
6	0,104528	0,104538	1,001046
7	0,121872	0,121882	1,001220
8	0,139189	0,139199	1,001394
9	0,156478	0,156488	1,001568
10	0,173740	0,173750	1,001742
11	0,190975	0,190985	1,001916
12	0,208183	0,208193	1,002090
13	0,225364	0,225374	1,002264
14	0,242518	0,242528	1,002438
15	0,259645	0,259655	1,002612
16	0,276745	0,276755	1,002786
17	0,293818	0,293828	1,002960
18	0,310864	0,310874	1,003134
19	0,327883	0,327893	1,003308
20	0,344875	0,344885	1,003482
21	0,361839	0,361849	1,003656
22	0,378776	0,378786	1,003830
23	0,395686	0,395696	1,004004
24	0,412569	0,412579	1,004178
25	0,429425	0,429435	1,004352
26	0,446254	0,446264	1,004526
27	0,463056	0,463066	1,004700
28	0,479831	0,479841	1,004874
29	0,496579	0,496589	1,005048
30	0,513300	0,513310	1,005222
31	0,529994	0,529994	1,005396
32	0,546661	0,546671	1,005570
33	0,563301	0,563311	1,005744
34	0,579914	0,579924	1,005918
35	0,596500	0,596510	1,006092
36	0,613059	0,613069	1,006266
37	0,629591	0,629601	1,006440
38	0,646096	0,646106	1,006614
39	0,662574	0,662584	1,006788
40	0,679025	0,679035	1,006962
41	0,695449	0,695459	1,007136
42	0,711846	0,711856	1,007310
43	0,728216	0,728226	1,007484
44	0,744559	0,744569	1,007658
45	0,760874	0,760884	1,007832
46	0,777162	0,777172	1,008006
47	0,793423	0,793433	1,008180
48	0,809657	0,809667	1,008354
49	0,825864	0,825874	1,008528
50	0,842044	0,842054	1,008702
51	0,858197	0,858207	1,008876
52	0,874323	0,874333	1,009050
53	0,890422	0,890432	1,009224
54	0,906494	0,906504	1,009398
55	0,922539	0,922549	1,009572
56	0,938557	0,938567	1,009746
57	0,954548	0,954558	1,009920
58	0,970512	0,970522	1,010094
59	0,986449	0,986459	1,010268
60	1,000000	1,000000	1,010442

Links siehst du eine Seite aus einem Tabellenbuch aus dem Jahr 1619. Auf diese Seite sind die Werte von $\sin(\alpha)$ für einige Winkel α mit $75^\circ \leq \alpha \leq 75,5^\circ$ gedruckt.

Rechts siehst du einen vergrößerten Ausschnitt der Seite. Berechne mit dem Taschenrechner:

$$\sin(75^\circ) = 0,965925... \quad \text{Findest du den Wert rechts?}$$

Eine Winkelminute ($1'$) ist $\frac{1}{60}$ von einem Grad (1°).

$$\sin(75^\circ 6') = \sin(75,1^\circ) = 0,966376...$$

Findest du auch diesen Wert rechts?

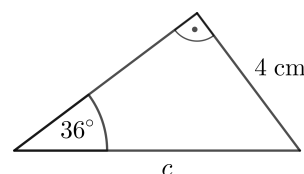
11	9667490
10	9667465
9	9666001
8	9665255
7	9664508
6	9663761
5	9663012
4	9662263
3	9661513
2	9660762
1	9660011
0	9659258
75	

Seitenlänge gesucht



Berechne die Seitenlänge c im rechts dargestellten Dreieck.

$$\begin{aligned} \sin(36^\circ) &= \frac{4}{c} \iff c \cdot \sin(36^\circ) = 4 \iff \\ \iff c &= \frac{4}{\sin(36^\circ)} = 6,80... \text{ cm} \end{aligned}$$

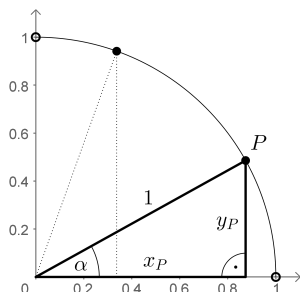


Arcusfunktionen



Der Kreisbogen mit Mittelpunkt $(0 | 0)$ und Radius 1 ist im Koordinatensystem unten eingezeichnet. Jedem *spitzen* Winkel α entspricht – wie dargestellt – ein Punkt $P = (x_P | y_P)$ auf dem Kreisbogen.

Die Punkte $(1 | 0)$ und $(0 | 1)$ sind ausgenommen.



1) Stelle mithilfe von α eine Formel zur Berechnung von y_P auf.

$$y_P = \sin(\alpha)$$

2) Wie groß bzw. wie klein kann $\sin(\alpha)$ für *spitze* Winkel α also sein?

$$0 < \sin(\alpha) < 1$$

Die Zuordnung von Winkel zu Seitenverhältnis kann für *spitze* Winkel **umgekehrt** werden. Berechne mit dem Taschenrechner:

$$\sin(\alpha) = 0,5 \iff \alpha = \arcsin(0,5) = 30^\circ \quad \text{„Arcussinus von 0,5“}$$

$$\cos(\alpha) = 0,5 \iff \alpha = \arccos(0,5) = 60^\circ \quad \text{„Arcuscosinus von 0,5“}$$

$$\tan(\alpha) = 0,5 \iff \alpha = \arctan(0,5) = 26,56...^\circ \quad \text{„Arcustangens von 0,5“}$$

Winkel gesucht



Berechne den Winkel α im rechts dargestellten Dreieck.

$$\tan(\alpha) = \frac{4}{3} \iff \alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53,13...^\circ$$

