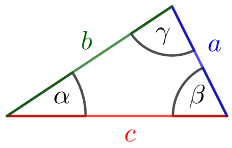
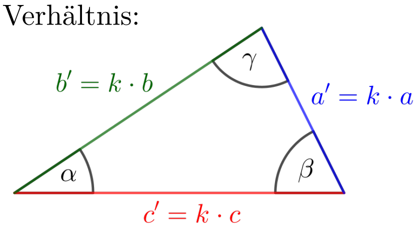
Ähnlichkeit

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn ihre Winkel paarweise übereinstimmen.
In den beiden Dreiecken haben entsprechende Seitenlängen dasselbe Verhältnis:

$$\frac{\boldsymbol{a'}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{b'}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c'}}{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{k}$$

Die Zahl k nennen wir auch **Skalierungsfaktor**.

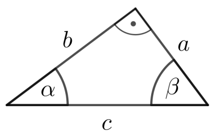


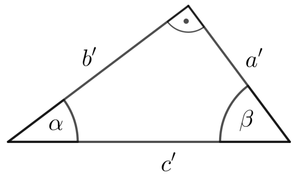


Zwei Winkel sind genug.

Die beiden dargestellten *rechtwinkeligen* Dreiecke haben den gleichen spitzen Winkel α.
Der dritte Winkel β muss dann auch in beiden Dreiecken gleich groß sein. Warum?
Stelle mithilfe von α eine Formel zur Berechnung von β auf.

$\beta =$ ______________________





Die beiden Dreiecke sind also zueinander ähnlich.

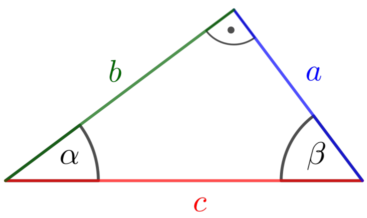
Zeige, dass aus $\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a}$ auch $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ folgt:

Kennt man von einem rechtwinkeligen Dreieck einen spitzen Winkel,
dann ist also jedes Verhältnis von 2 Seitenlängen *eindeutig* festgelegt.

Winkelfunktionen

Die Kathete a liegt *gegenüber* von α. Sie heißt deshalb **Gegenkathete von $\boldsymbol{\alpha}$**.
Die Kathete b liegt am Winkel α *an*. Sie heißt deshalb **Ankathete von $\boldsymbol{\alpha}$**.

Die **Winkelfunktionen Sinus**, **Cosinus** und **Tangens** ordnen jedem spitzen Winkel α ein Seitenverhältnis im *rechtwinkeligen* Dreieck mit Winkel α zu:



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$ „Sinus von α“

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$ „Cosinus von α“

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{a}{b}$$ „Tangens von α“

Zerlegung in rechtwinkelige Dreiecke

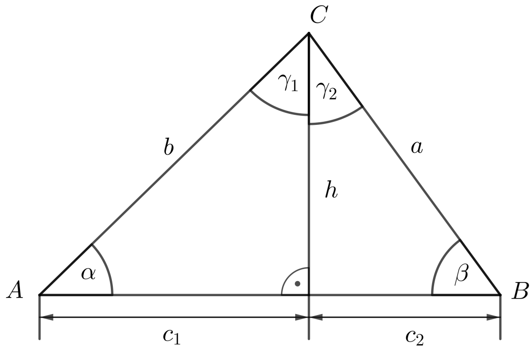
Das Dreieck ABC wird durch eine Höhe in zwei rechtwinkelige Dreiecke zerlegt.
Trage die richtigen Seitenlängen in die Lücken ein.

$\sin(\alpha) = \frac{\square}{\square}$ $\cos(\alpha) = \frac{\square}{\square}$ $\tan(\alpha) = \frac{\square}{\square}$

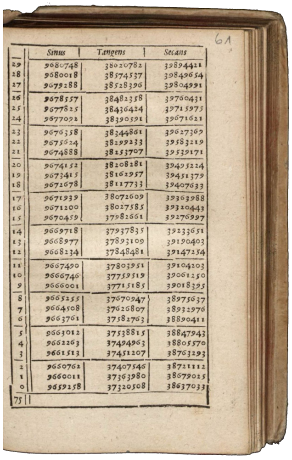
$\sin(\beta) = \frac{\square}{\square}$ $\cos(\beta) = \frac{\square}{\square}$ $\tan(\beta) = \frac{\square}{\square}$

$\sin(\gamma_1) = \frac{\square}{\square}$ $\cos(\gamma_1) = \frac{\square}{\square}$ $\tan(\gamma_1) = \frac{\square}{\square}$

$\sin(\gamma_2) = \frac{\square}{\square}$ $\cos(\gamma_2) = \frac{\square}{\square}$ $\tan(\gamma_2) = \frac{\square}{\square}$



Tabellenbuch aus dem Jahr 1619



Links siehst du eine Seite aus einem Tabellenbuch aus dem Jahr 1619. Auf diese Seite sind die Werte von $\sin(\alpha)$ für einige Winkel α mit $75° \leq \alpha \leq 75{,}5°$ gedruckt.

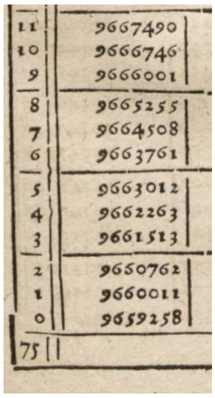
Rechts siehst du einen vergrößerten Ausschnitt der Seite. Berechne mit dem Taschenrechner:

$\sin(75°) =$ ____________ Findest du den Wert rechts?

Eine Winkelminute $(1')$ ist $\frac{1}{60}$ von einem Grad $(1°)$.

$\sin(75°\ 6') = \sin($ ________ $°) =$ ______________

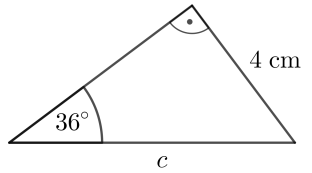
Findest du auch diesen Wert rechts?



11	9667490
10	9666746
9	9666001
8	9665255
7	9664508
6	9663761
5	9663012
4	9662263
3	9661513
2	9650762
1	9660011
0	9659258
75	

Seitenlänge gesucht

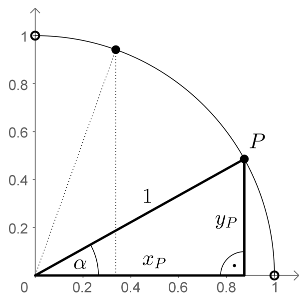
Berechne die Seitenlänge c im rechts dargestellten Dreieck.



Arcusfunktionen

Der Kreisbogen mit Mittelpunkt $(0 \mid 0)$ und Radius 1 ist im Koordinatensystem unten eingezeichnet. Jedem *spitzen* Winkel α entspricht – wie dargestellt – ein Punkt $P = (x_P \mid y_P)$ auf dem Kreisbogen.

Die Punkte $(1 \mid 0)$ und $(0 \mid 1)$ sind ausgenommen.



1) Stelle mithilfe von α eine Formel zur Berechnung von y_P auf.

$y_P =$ ______________

2) Wie groß bzw. wie klein kann $\sin(\alpha)$ für *spitze* Winkel α also sein?

$\square < \sin(\alpha) < \square$

Die Zuordnung von Winkel zu Seitenverhältnis kann für *spitze* Winkel umgekehrt werden. Berechne mit dem Taschenrechner:

$\sin(\alpha) = 0{,}5 \iff \alpha = \arcsin(0{,}5) =$ ________ „Arcussinus von 0,5“

$\cos(\alpha) = 0{,}5 \iff \alpha = \arccos(0{,}5) =$ ________ „Arcuscosinus von 0,5“

$\tan(\alpha) = 0{,}5 \iff \alpha = \arctan(0{,}5) =$ ________ „Arcustangens von 0,5“

Winkel gesucht

Berechne den Winkel α im rechts dargestellten Dreieck.