**Änderungsmaße von Funktionen**

Die Höhe $h$ einer Sonnenblume wird täglich gemessen und aufgezeichnet.

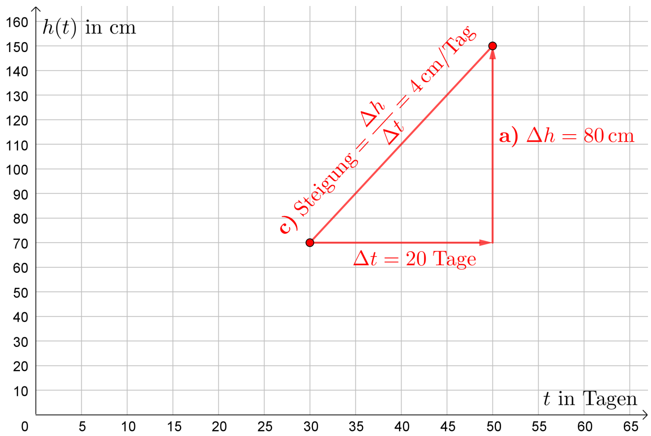
$t\ldots$ Zeit in Tagen
$h(t)\ldots$ Höhe der Sonnenblume am Tag $t$ in cm

Es gilt $h(30) = 70\,\text{cm}$ und $h(50) = 150\,\text{cm}$.

**a)** Um wie viel cm ist die Sonnenblume am Tag 50 höher als am Tag 30? Veranschauliche das Ergebnis im unten dargestellten Koordinatensystem.

**b)** Um wie viel Prozent ist die Sonnenblume am Tag 50 höher als am Tag 30?

**c)** Um wie viel cm ist die Sonnenblume von Tag 30 bis Tag 50 pro Tag *durchschnittlich* gewachsen? Veranschauliche das Ergebnis im Koordinatensystem.




**a)** $\Delta h = h(50) - h(30) = 80\,\text{cm}$

**b)** Lösungsweg 1:

$$\frac{h(50)}{h(30)} = \frac{150}{70} = 2{,}142\ldots = 214{,}2\ldots\,\%$$

Lösungsweg 2:

$$\frac{h(50) - h(30)}{h(30)} = \frac{80}{70} = 1{,}142\ldots = 114{,}2\ldots\,\%$$

Am Tag 50 ist die Sonnenblume *um* $114{,}2\ldots\,\%$ höher als am Tag 30.

**c)** $$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(50) - h(30)}{50 - 30} = \frac{80\,\text{cm}}{20\,\text{Tage}} = 4\,\text{cm/Tag}$$

Von Tag 30 bis Tag 50 ist die Sonnenblume pro Tag *durchschnittlich* um 4 cm gewachsen.

Du hast drei verschiedene Änderungsmaße der Funktion $h$ berechnet. Für die Ergebnisse gibt es jeweils einen Fachbegriff.

**Änderungsmaße von Funktionen**

Eine Funktion $f$ ist auf dem Intervall $[a; b]$ mit $a < b$ definiert.
Wir unterscheiden zwischen den folgenden **Änderungsmaßen von $f$ in $[a; b]$**:

| **Änderungsmaß** | **Formel** | **Einheit** |
|---|---|---|
| **Absolute Änderung** von $f$ in $[a; b]$ | $f(b) - f(a)$ | Einheit von $f(a)$ |
| **Relative/Prozentuelle Änderung** von $f$ in $[a; b]$ | $\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$ mit $f(a) \neq 0$ | 1 |
| **Mittlere Änderungsrate** von $f$ in $[a; b]$ | $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (**Differenzenquotient**) | $\frac{\text{Einheit von } f(a)}{\text{Einheit von } a}$ |

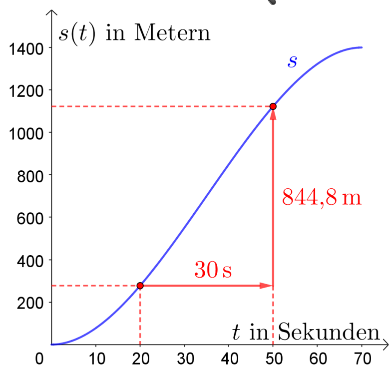
**Mittlere Geschwindigkeit & Mittlere Beschleunigung**

Die Fahrt einer U-Bahn zwischen zwei Stationen dauert 70 Sekunden und wird durch die folgende Weg-Zeit-Funktion $s$ modelliert:

$$s(t) = -\frac{2}{245} \cdot t^3 + \frac{6}{7} \cdot t^2$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden $(0 \leq t \leq 70)$
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg im Zeitintervall $[0; t]$ in Metern

Der Funktionsgraph von $s$ ist rechts dargestellt.




**a)** Berechne die absolute Änderung von $s$ in $[0; 70]$.
Interpretiere sie im Sachzusammenhang.

**b)** Berechne die mittlere Änderungsrate von $s$ in $[20; 50]$. Interpretiere sie im Sachzusammenhang.

**a)** $s(70) - s(0) = 1400\,\text{m} - 0\,\text{m} = 1400\,\text{m}$

Die U-Bahn legt zwischen den beiden Stationen $1400\,\text{m}$ zurück.

**b)** $\dfrac{s(50) - s(20)}{50 - 20} = \dfrac{1122{,}4\ldots - 277{,}5\ldots}{50 - 20} = \dfrac{844{,}8\ldots\,\text{m}}{30\,\text{s}} = 28{,}16\ldots\,\text{m/s}$

Im Zeitintervall $[20; 50]$ legt die U-Bahn pro Sekunde *durchschnittlich* 28,16... m zurück.
Oder: Die *mittlere* Geschwindigkeit der U-Bahn im Zeitintervall $[20; 50]$ ist 28,16... m/s.

Die zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Funktion $v$ hat die folgende Gleichung:

$$v(t) = -\frac{6}{245} \cdot t^2 + \frac{12}{7} \cdot t$$

Zwischen den Funktionen $s$ und $v$ besteht ein Zusammenhang. Woran erkennst du am Funktionsgraphen von $s$, ob die U-Bahn zum Zeitpunkt $t = 10\,\text{s}$ oder zum Zeitpunkt $t = 30\,\text{s}$ schneller ist?

$t \ldots$ Zeit in Sekunden $(0 \leq t \leq 70)$
$v(t) \ldots$ Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t$ in m/s

**c)** Berechne die Geschwindigkeit der U-Bahn nach 20 Sekunden.

**d)** Berechne die mittlere Geschwindigkeit der U-Bahn im Zeitintervall $[20; 20{,}1]$.
Vergleiche die Ergebnisse von **c)** und **d)**. Was fällt dir auf? Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Differentialquotient.

**e)** Berechne die mittlere Änderungsrate von $v$ in $[10; 30]$. Interpretiere sie im Sachzusammenhang.

**c)** $v(20) = 24{,}48\ldots\,\text{m/s}$

**d)** $\dfrac{\text{Zurückgelegter Weg}}{\text{Benötigte Zeit}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(20{,}1) - s(20)}{20{,}1 - 20} = 24{,}52\ldots\,\text{m/s}$

**e)** $\dfrac{v(30) - v(10)}{30 - 10} = \dfrac{14{,}69\ldots\,\text{m/s}}{20\,\text{s}} = 0{,}734\ldots\,\text{m/s}^2$

Im Zeitintervall $[10; 30]$ steigt die Geschwindigkeit der U-Bahn pro Sekunde *durchschnittlich* um 0,734... m/s.
Oder: Die *mittlere* Beschleunigung der U-Bahn im Zeitintervall $[10; 30]$ ist $0{,}734\ldots\,\text{m/s}^2$.