Arithmetische Folge

Bei einer **arithmetischen Folge** (a_n) ist die **Differenz** $\boldsymbol{d}$ zweier aufeinander folgender Glieder konstant:

- $a_2 - a_1 = d$
- $a_3 - a_2 = d$
- $a_{n+1} - a_n = d \quad$ für alle $n \geq 1$

$$(a_1 \overset{+d}{\curvearrowright} a_2 \overset{+d}{\curvearrowright} a_3 \overset{+d}{\curvearrowright} \ldots ; a_n \overset{+d}{\curvearrowright} a_{n+1}; \ldots)$$

Zum Beispiel:
$(a_n) = (5; 7; 9; 11; 13; ...)$

Arithmetische Folge

Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

a) Die arithmetische Folge $(a_n) = \left(2; 5; \square; \square; \square; \ldots\right)$ hat die Differenz $d = \square$.

b) Die arithmetische Folge $(b_n) = \left(7; 5; \square; \square; \square; \ldots\right)$ hat die Differenz $d = \square$.

c) Die arithmetische Folge $(c_n) = \left(\square; 4; \square; \square; 4; \ldots\right)$ hat die Differenz $d = \square$.

d) Die arithmetische Folge $(d_n) = \left(7; \square; \square; \square; 23; \ldots\right)$ hat die Differenz $d = \square$.

Bildungsgesetze arithmetischer Folgen

Gegeben ist die arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 1} = (2; 5; 8; 11; ...)$.

1) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz für (a_n).

2) Berechne a_{42}. Hinweis: Wie viele „Schritte“ sind es von a_1 zu a_{42}?

3) Ermittle ein explizites Bildungsgesetz für (a_n). Hinweis: Wie viele „Schritte“ sind es von a_1 zu a_n?

Bildungsgesetze arithmetischer Folgen

Allgemein hat jede arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Differenz d die folgenden Bildungsgesetze:

- **Rekursives Bildungsgesetz:** $\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}$ und Angabe von $\boldsymbol{a_1}$
- **Explizites Bildungsgesetz:** $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$

Arithmetische Folge?

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ enthält die Folgenglieder $a_2 = 3$, $a_6 = 5$ und $a_{16} = 11$.
Begründe, warum (a_n) *keine* arithmetische Folge sein kann.

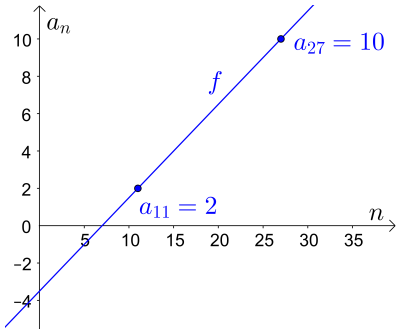
Arithmetische Folge – Lineare Funktion

Die arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ enthält die Folgenglieder $a_{11} = 2$ und $a_{27} = 10$.

1) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz und ein explizites Bildungsgesetz für (a_n).

2) Das wievielte Folgenglied hat den Wert 23?

3) Rechts sind die beiden Folgenglieder a_{11} und a_{27} in einem Koordinatensystem dargestellt.
Der Graph der linearen Funktion f enthält diese beiden Punkte.
Ermittle die Steigung von f. Was fällt dir auf?



Carl Friedrich Gauß

1) Carl soll die Summe $s = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$ berechnen.
Er erkennt, dass $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \cdots$ gilt, und addiert:

$$\begin{aligned} s &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 \\ s &= 100 + 99 + 98 + \cdots + 1 \\ \hline 2 \cdot s &= 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{\boxed{} \cdot 101}{2} = \boxed{}$$

2) Aus wie vielen Summanden besteht $2 + 5 + 8 + \cdots + 170 + 173 + 176$?
Berechne wie Carl in **1)** die Summe.

Arithmetische Reihe

Für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ kürzen wir mit s_n die Summe der ersten n Folgenglieder ab:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Wenn $(a_n)_{n\geq 1}$ eine **arithmetische Folge** ist, dann gilt:

$$\boldsymbol{s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}}$$

„Ersten und letzten Summanden addieren und mit der halben Anzahl multiplizieren."

Arithmetische Reihe

Unten siehst du eine Begründung für diese Summenformel.
An welcher Stelle verwenden wir die Voraussetzung, dass (a_n) eine arithmetische Folge ist?

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \quad a_2 \quad + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ s_n &= a_n + a_{n-1} + \cdots + \quad a_2 \quad + a_1 \\ \hline 2 \cdot s_n &= \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{=(a_1+a_n)\cdot n} \quad \Longrightarrow \quad s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} \checkmark \end{aligned}$$

Arithmetische Reihe

Gegeben ist die arithmetische Folge $(a_n) = (4; 7; 10; 13; \ldots)$.

1) Ermittle ein explizites Bildungsgesetz für (a_n).

2) Berechne die Summe der ersten 42 Folgenglieder von (a_n).

3) Die Summe der ersten n Folgenglieder von (a_n) beträgt 1000. Berechne n.

$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2 \cdot n - 1)$

Gegeben ist die arithmetische Folge $(a_n) = (1; 3; 5; 7; 9; \ldots)$.

1) Berechne die Summe der ersten 1, 2, 3, 4 bzw. 5 Folgenglieder.

$s_1 = \boxed{}$ $s_2 = \boxed{}$ $s_3 = \boxed{}$ $s_4 = \boxed{}$ $s_5 = \boxed{}$

2) Zeige mithilfe der Summenformel, dass $s_n = n^2$ gilt.

Summenzeichen

Das Summenzeichen $\sum$ (Sigma) kann zur kürzeren Darstellung von Additionen helfen.

Zum Beispiel: $\sum_{k=3}^{7}(k^2 - 2 \cdot k) = \underbrace{(3^2 - 2 \cdot 3)}_{=3} + \underbrace{(4^2 - 2 \cdot 4)}_{=8} + \underbrace{(5^2 - 2 \cdot 5)}_{=15} + \underbrace{(6^2 - 2 \cdot 6)}_{=24} + \underbrace{(7^2 - 2 \cdot 7)}_{=35} = 85$

Setze für k jede natürliche Zahl von 3 bis 7 ein, und addiere diese 5 Summanden.

Summenzeichen

Berechne die Summe.

a) $\sum_{k=1}^{3}(4 \cdot k + 2) =$

b) $\sum_{k=1}^{30}(4 \cdot k + 2) =$

c) $\sum_{k=23}^{87}(4 \cdot k + 2) =$

Arithmetische Folge – Arithmetisches Mittel

Die arithmetische Folge (a_n) hat die Differenz d.
Zeige, dass jedes Folgenglied das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist, also:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$$

Dieses Werk des Projekts MmF unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
https://mmf.univie.ac.at