

Arithmetische Folge



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Bei einer **arithmetischen Folge** (a_n) ist die **Differenz d** zweier aufeinander folgender Glieder konstant:

$$(a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; a_{n+1}; \dots)$$

$\xrightarrow{+d}$ $\xrightarrow{+d}$ $\xrightarrow{+d}$ $\xrightarrow{+d}$

- $a_2 - a_1 = d$
- $a_3 - a_2 = d$
- $a_{n+1} - a_n = d$ für alle $n \geq 1$

Zum Beispiel:

$$(a_n) = (5; 7; 9; 11; 13; \dots)$$

Arithmetische Folge



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

a) Die arithmetische Folge $(a_n) = (2; 5; \square; \square; \square; \dots)$ hat die Differenz $d = \square$.

b) Die arithmetische Folge $(b_n) = (7; 5; \square; \square; \square; \dots)$ hat die Differenz $d = \square$.

c) Die arithmetische Folge $(c_n) = (\square; 4; \square; \square; 4; \dots)$ hat die Differenz $d = \square$.

d) Die arithmetische Folge $(d_n) = (7; \square; \square; \square; 23; \dots)$ hat die Differenz $d = \square$.

Bildungsgesetze arithmetischer Folgen



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Gegeben ist die arithmetische Folge $(a_n)_{n \geq 1} = (2; 5; 8; 11; \dots)$.

1) Ermittle ein **rekursives Bildungsgesetz** für (a_n) .

2) Berechne a_{42} .

Hinweis: Wie viele „Schritte“ sind es von a_1 zu a_{42} ?

3) Ermittle ein **explizites Bildungsgesetz** für (a_n) .

Hinweis: Wie viele „Schritte“ sind es von a_1 zu a_n ?

Bildungsgesetze arithmetischer Folgen



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Allgemein hat jede arithmetische Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit Differenz d die folgenden Bildungsgesetze:

- **Rekursives Bildungsgesetz:** $a_{n+1} = a_n + d$ und Angabe von a_1
- **Explizites Bildungsgesetz:** $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Arithmetische Folge?



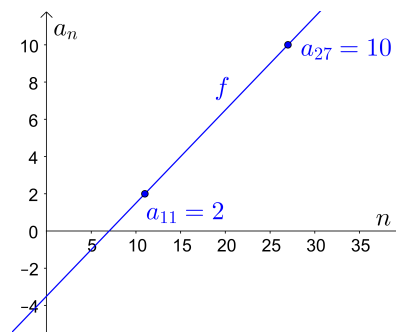
MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ enthält die Folgenglieder $a_2 = 3$, $a_6 = 5$ und $a_{16} = 11$.
Begründe, warum (a_n) *keine* arithmetische Folge sein kann.



Die arithmetische Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ enthält die Folgenglieder $a_{11} = 2$ und $a_{27} = 10$.

- 1) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz und ein explizites Bildungsgesetz für (a_n) .
- 2) Das wievielte Folgenglied hat den Wert 23?
- 3) Rechts sind die beiden Folgenglieder a_{11} und a_{27} in einem Koordinatensystem dargestellt. Der Graph der **linearen Funktion** f enthält diese beiden Punkte. Ermittle die Steigung von f . Was fällt dir auf?



- 1) Carl soll die Summe $s = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$ berechnen. Er erkennt, dass $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots$ gilt, und addiert:

$$s = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

$$s = 100 + 99 + 98 + \dots + 1$$

$$2 \cdot s = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{\boxed{} \cdot 101}{2} = \boxed{}$$

- 2) Aus wie vielen Summanden besteht $2 + 5 + 8 + \dots + 170 + 173 + 176$? Berechne wie Carl in 1) diese Summe.



Für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ kürzen wir mit s_n die Summe der ersten n Folgenglieder ab:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Wenn $(a_n)_{n \geq 1}$ eine **arithmetische Folge** ist, dann gilt:

$$s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} \quad \text{„Ersten und letzten Summanden addieren und mit der halben Anzahl multiplizieren.“}$$

Unten siehst du eine Herleitung dieser Summenformel.

An welcher Stelle wird verwendet, dass (a_n) eine arithmetische Folge ist?

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$s_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$$

$$\begin{array}{l} \hline 2 \cdot s_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{=(a_1+a_n) \cdot n} \implies s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} \end{array}$$



Gegeben ist die arithmetische Folge $(a_n) = (4; 7; 10; 13; \dots)$.

- 1) Ermittle ein explizites Bildungsgesetz für (a_n) .
- 2) Berechne die Summe der ersten 42 Folgenglieder von (a_n) .
- 3) Die Summe der ersten n Folgenglieder von (a_n) beträgt 1000. Berechne n .

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2 \cdot n - 1)$$

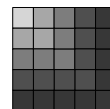


Gegeben ist die arithmetische Folge $(a_n) = (1; 3; 5; 7; 9; \dots)$.

1) Berechne die Summe der ersten 1, 2, 3, 4 bzw. 5 Folgenglieder.

$$s_1 = \boxed{} \quad s_2 = \boxed{} \quad s_3 = \boxed{} \quad s_4 = \boxed{} \quad s_5 = \boxed{}$$

2) Zeige mithilfe der Summenformel, dass $s_n = n^2$ gilt.



Summenzeichen



Das Summenzeichen \sum (Sigma) kann zur kürzeren Darstellung von Additionen helfen. Zum Beispiel:

$$\sum_{k=3}^7 (k^2 - 2 \cdot k) = \underbrace{(3^2 - 2 \cdot 3)}_{=3} + \underbrace{(4^2 - 2 \cdot 4)}_{=8} + \underbrace{(5^2 - 2 \cdot 5)}_{=15} + \underbrace{(6^2 - 2 \cdot 6)}_{=24} + \underbrace{(7^2 - 2 \cdot 7)}_{=35} = 85$$

Summenzeichen



Berechne die Summe.

a) $\sum_{k=1}^3 (4 \cdot k + 2) =$

b) $\sum_{k=1}^{30} (4 \cdot k + 2) =$

c) $\sum_{k=23}^{87} (4 \cdot k + 2) =$

Arithmetische Folge – Arithmetisches Mittel



Die arithmetische Folge (a_n) hat die Differenz d .

Zeige, dass jedes Folgenglied das **arithmetische Mittel** seiner beiden Nachbarglieder ist, also:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$$