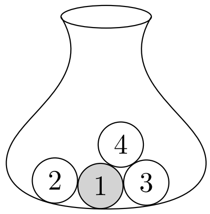
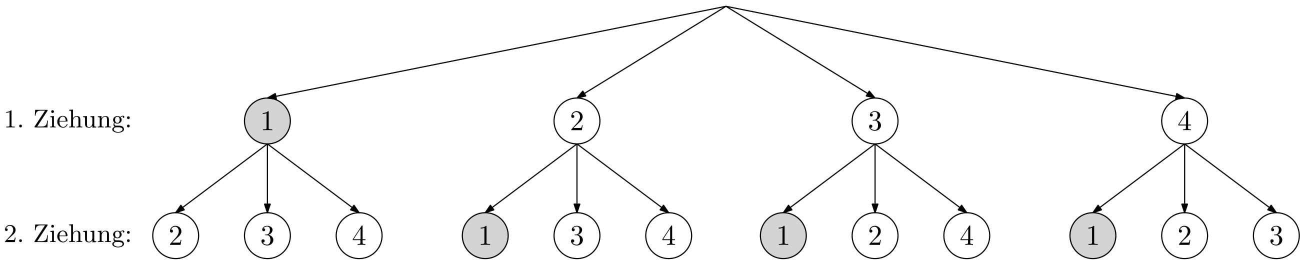
Bsp: In einer Urne befinden sich eine graue Kugel und drei weiße Kugeln, die durchnummeriert sind. Du ziehst blind zweimal hintereinander eine Kugel. Die gezogenen Kugeln legst du dabei *nicht* zurück. Kurz gesagt: „Ziehen *ohne* Zurücklegen“
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide gezogenen Kugeln weiß sind?



Zweistufiges Zufallsexperiment

Die möglichen Abläufe des Zufallsexperiments sind im folgenden Baumdiagramm dargestellt:



Es gibt insgesamt ______________ verschiedene Abläufe, die alle gleich wahrscheinlich sind.
Es handelt sich also um ein Laplace-Experiment.

Markiere alle Abläufe, bei denen beide gezogenen Kugeln weiß sind.

Es gibt insgesamt ______________ verschiedene Abläufe, bei denen beide Kugeln weiß sind.

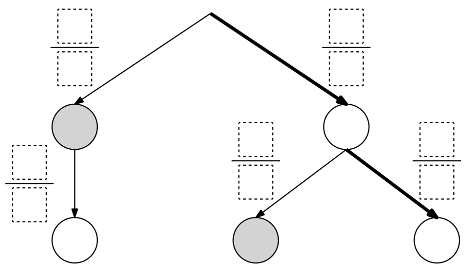
Berechne damit die Wahrscheinlichkeit, dass beide gezogenen Kugeln weiß sind:

$$\frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl mögliche Ergebnisse}} =$$

Multiplikationssatz

Bei zukünftigen Aufgaben fassen wir jeder Verzweigung alle gleichartigen Pfeile zusammen.
Wir interessieren uns ja tatsächlich nur für die Farbe der gezogenen Kugel und nicht ihre Nummer.
Im folgenden Bild haben wir das Baumdiagramm aus dem vorigen Beispiel zusammengefasst:

Jeder Verzweigung im Baumdiagramm entspricht ein Laplace-Experiment. Beschrifte jeden Pfeil rechts mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit.



1. Pfadregel (Multiplikationssatz):
Die Wahrscheinlichkeit von einem Pfad ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades.

Berechne mit der 1. Pfadregel die Wahrscheinlichkeit, dass beide gezogenen Kugeln weiß sind:

$$\frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square \cdot \square}{\square \cdot \square} = \underline{\qquad}\ \%$$

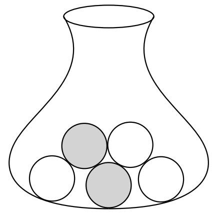
Vergleiche diese Rechnung mit der Rechnung oben.

Berechne mit der 1. Pfadregel die Wahrscheinlichkeit, ...

... zuerst eine graue und danach eine weiße Kugel zu ziehen:

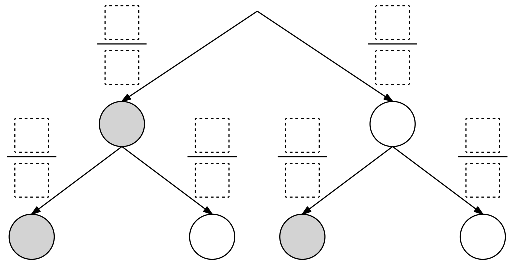
... zuerst eine weiße und danach eine graue Kugel zu ziehen:

Bsp: In einer Urne befinden sich 2 graue Kugeln und 3 weiße Kugeln.
Du ziehst blind 2 Kugeln ohne Zurücklegen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden gezogenen Kugeln verschiedene Farben haben?



Additionssatz

Beschrifte jeden Pfeil rechts mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit. Markiere alle, bei denen die beiden gezogenen Kugeln verschiedene Farben haben.



2. Pfadregel (Additionssatz): Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der für dieses Ereignis günstigen Pfade.

Berechne damit die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden gezogenen Kugeln verschiedene Farben haben:

$$\frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} =$$

Die beiden Pfadregeln für Wahrscheinlichkeiten sind die gleichen Pfadregeln wie beim Rechnen mit relativen Häufigkeiten.

Bsp: In einem Fußballstadion sehen sich 21 600 Personen ein Match zwischen Team A und Team B an.

- $\frac{11}{18}$ der Personen sind Fans von Team A, die anderen Personen sind Fans von Team B.
- $\frac{7}{40}$ der Fans von Team A sind minderjährig.
- Unter den Fans von Team B befinden sich 7140 volljährige Personen.

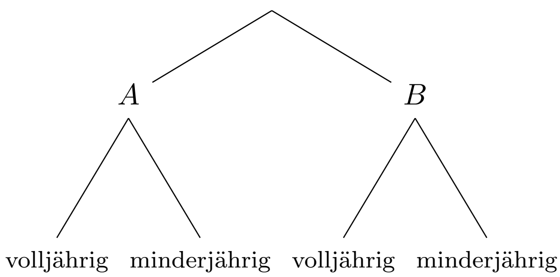
Absolute und relative Häufigkeiten

1) Vervollständige die Tabelle mit den absoluten Häufigkeiten:

	volljährig	minderj.	Summe
A			
B			
Summe			

So eine Tabelle wird auch **Vierfeldertafel** genannt.

2) Beschrifte das Baumdiagramm mit den relativen Häufigkeiten:



a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person ein Fan von Team A und minderjährig ist?

Zwei Wege zum Ziel

Lösung mit Vierfeldertafel:

Lösung mit Baumdiagramm:

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Fan volljährig ist?

Zwei Wege zum Ziel

Lösung mit Vierfeldertafel:

Lösung mit Baumdiagramm:

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte volljährige Person ein Fan von Team B ist?

Zwei Wege zum Ziel?

Lösung mit Vierfeldertafel:

Für die Lösung mit dem Baumdiagramm verwenden wir **bedingte Wahrscheinlichkeiten**.
Mehr dazu erfährst du gleich.

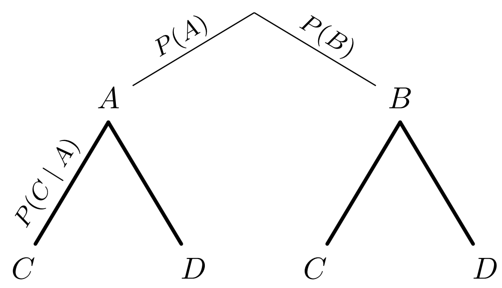
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Auf den unteren Stufen eines Baumdiagramms sind **bedingte Wahrscheinlichkeiten**.

„Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis C eintritt, wenn wir bereits wissen, dass Ereignis A eintritt?“

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit**, dass C unter der Bedingung A eintritt, kürzen wir mit $\boldsymbol{P(C \mid A)}$ ab.

Beschrifte das Baumdiagramm rechts mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten.



Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit, dass C unter der Bedingung A eintritt, ist

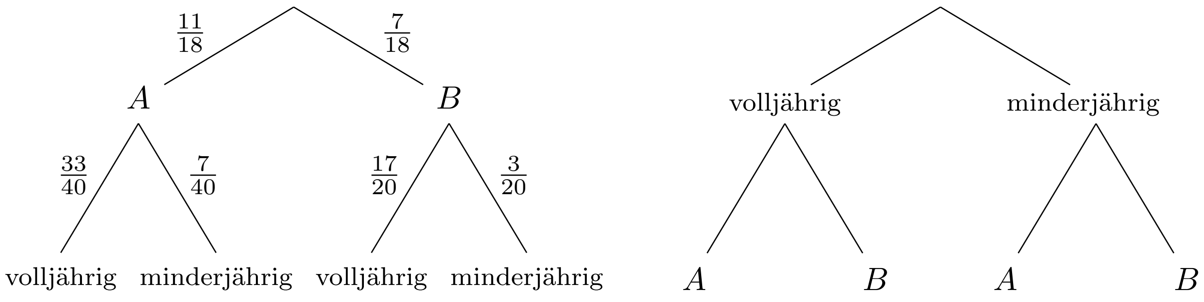
$$\boldsymbol{P(C \mid A) = \frac{P(C \text{ und } A)}{P(A)}}, \qquad P(A) > 0.$$

Erkläre mit der 1. Pfadregel, warum diese Formel für zweistufige Laplace-Experimente gilt.

Stufentausch

1) Lies aus dem linken Baumdiagramm die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten ab:

$P(\text{vollj.} \mid A) = \frac{\square}{\square}$ $\quad P(\text{minderj.} \mid A) = \frac{\square}{\square}$ $\quad P(\text{vollj.} \mid B) = \frac{\square}{\square}$ $\quad P(\text{minderj.} \mid B) = \frac{\square}{\square}$



2) Im rechten Baumdiagramm sind die beiden Stufen in umgekehrter Reihenfolge angeordnet. Berechne die beiden Wahrscheinlichkeiten auf der oberen Stufe:

$P(\text{volljährig}) =$

$P(\text{minderjährig}) =$

3) Die bedingten Wahrscheinlichkeiten auf der unteren Stufe kannst du folgendermaßen berechnen:

$$P(A \text{ und volljährig}) = \begin{cases} \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} & \text{Linkes Baumdiagramm} \\ \frac{\square}{\square} \cdot P(A \mid \text{volljährig}) & \text{Rechtes Baumdiagramm} \end{cases}$$

$\implies \quad P(A \mid \text{volljährig}) =$

$\implies \quad P(B \mid \text{volljährig}) = 1 - P(A \mid \text{volljährig}) =$ Vergleiche mit **c)**.

4) Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A \mid \text{minderjährig})$ und $P(B \mid \text{minderjährig})$.

$$\frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = P(A \text{ und minderjährig}) = \frac{\square}{\square} \cdot P(A \mid \text{minderjährig})$$

$\implies \quad P(A \mid \text{minderjährig}) =$

$\implies \quad P(B \mid \text{minderjährig}) =$

Die allgemeine Formel $\boldsymbol{P(C \mid A) = \dfrac{P(A \mid C) \cdot P(C)}{P(A)}}$ mit $P(A) > 0$ heißt auch **Satz von Bayes**.