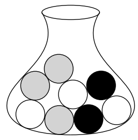
Erwartungswert



In einer Urne sind 3 graue Kugeln, 3 weiße Kugeln und 2 schwarze Kugeln.
Du ziehst 3 Kugeln ohne Zurücklegen.
Die Zufallsvariable X gibt an, wie viele der 3 gezogenen Kugeln weiß sind.

1) Berechne die Wahrscheinlichkeiten $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$ und $P(X=3)$.
Trage die Wahrscheinlichkeiten als Brüche in die Tabelle rechts ein.

$$P(X=0) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{60}{336}$$

$$P(X=1) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot 3 = \frac{180}{336}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot 3 = \frac{90}{336}$$

$$P(X=3) = \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{6}{336}$$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{60}{336}$	$\frac{180}{336}$	$\frac{90}{336}$	$\frac{6}{336}$

2) Berechne den Erwartungswert von X, und interpretiere seinen Wert.

$$E(X) = 0\cdot\frac{60}{336} + 1\cdot\frac{180}{336} + 2\cdot\frac{90}{336} + 3\cdot\frac{6}{336} = 1{,}125 \text{ weiße Kugeln}$$

Bei häufiger Durchführung dieses Zufallsexperiments sind unter den 3 gezogenen Kugeln *durchschnittlich* 1,125 weiße Kugeln zu erwarten.

Gegenwahrscheinlichkeit

Du würfelst n Mal mit einem fairen 6-seitigen Würfel mit den Augenzahlen von 1 bis 6.
Die Zufallsvariable X_n gibt die Anzahl der gewürfelten Sechser an.

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 10 Würfen *kein* Sechser befindet.

$$P(X_{10}=0) = \underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{5}{6}}_{\text{10 Faktoren}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 16{,}15\ldots\,\%$$

2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 10 Würfen mindestens ein Sechser befindet.

$$P(X_{10}\geq 1) = 1 - P(X_{10}=0) = 83{,}84\ldots\,\%$$

3) Stelle mithilfe von n eine Formel für die Wahrscheinlichkeit auf,
dass sich unter n Würfen mindestens ein Sechser befindet.

$$P(X_n\geq 1) = 1 - P(X_n=0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

4) Wie oft muss man würfeln, damit sich mit mindestens 99 %-iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Sechser unter den Würfen befindet?

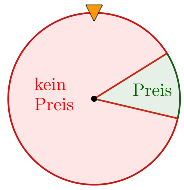
$$P(X_n\geq 1)\geq 0{,}99 \iff 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}99 \iff \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}01 \overset{\ln\nearrow}{\iff}$$

$$\iff n\cdot\ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0{,}01) \overset{\ln(\frac{5}{6})<0}{\iff} n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(\frac{5}{6})} = 25{,}2\ldots$$

Man muss mindestens 26 Mal würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Sechser mindestens 99 % beträgt.

Glücksrad

Bei einem Glücksrad gewinnt man bei jeder Drehung unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p einen Preis.



1) Du drehst 42 Mal am Glücksrad.
Beschreibe jeweils in Worten ein Ereignis, das in diesem Sachzusammenhang die angegebene Wahrscheinlichkeit hat.

Ereignis	Wahrscheinlichkeit
42 Mal hintereinander einen Preis gewinnen	p^{42}
42 Mal hintereinander keinen Preis gewinnen	$(1-p)^{42}$
nicht 42 Mal hintereinander einen Preis gewinnen bzw. bei 42 Drehungen mindestens einmal keinen Preis gewinnen	$1-p^{42}$
nicht 42 Mal hintereinander keinen Preis gewinnen bzw. bei 42 Drehungen mindestens einmal einen Preis gewinnen	$1-(1-p)^{42}$

2) Bei 42 Drehungen gewinnt man mit der Wahrscheinlichkeit 99,9 % mindestens einmal einen Preis.
Berechne den zugehörigen Zentriwinkel des Preis-Sektors.

$$1-(1-p)^{42}=0{,}999 \iff (1-p)^{42}=0{,}001 \iff p=1-\sqrt[42]{0{,}001}=0{,}1516\ldots$$

Für den gesuchten Zentriwinkel α gilt also:

$$\alpha = 360° \cdot 0{,}1516\ldots = 54{,}59\ldots°$$

Minimum

Ein Zufallsgenerator erzeugt 5 natürliche Zahlen von 1 bis 100 nach dem Zufallsprinzip.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die kleinste dieser 5 Zufallszahlen höchstens 42 ist.

MIN . . . kleinste der 5 Zufallszahlen
Zum Ereignis MIN ≤ 42 gehören alle Ergebnisse, bei denen mindestens eine Zahl ≤ 42 ist.
Zum Gegenereignis MIN > 42 gehören alle Ergebnisse, bei denen jede Zahl > 42 ist.

$$P(\text{MIN} \leq 42) = 1 - P(\text{MIN} > 42) = 1 - \left(\frac{58}{100}\right)^5 = 93{,}43\ldots\,\%$$

Binomialverteilung

Du würfelst immer wieder 60 Mal mit einem fairen 6-seitigen Würfel.
Bei häufiger Durchführung sind *durchschnittlich* 10 Sechser zu erwarten.
Wie wahrscheinlich ist es, bei einem Versuch *genau* 10 Sechser zu würfeln?
Mehr dazu findest du am Arbeitsblatt – Binomialverteilung.