**Grenzwerte**

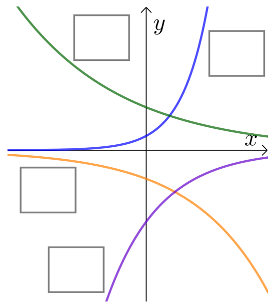
Ist $\mathbf{0 < a < 1}$, dann werden die Zahlen $a^1$, $a^2$, $a^3$, $a^4$, … immer kleiner und kommen der Zahl 0 beliebig nahe. Wir schreiben kurz: $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a^n = 0}$ bzw. $\boldsymbol{a^n \to 0}$

Ist $\boldsymbol{a > 1}$, dann werden die Zahlen $a^1$, $a^2$, $a^3$, $a^4$, … immer größer und überschreiten jede noch so große Zahl. Wir schreiben kurz: $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a^n = \infty}$ bzw. $\boldsymbol{a^n \to \infty}$

**Asymptotisches Verhalten von $x \mapsto c \cdot a^x$**

Das asymptotische Verhalten der Exponentialfunktion $f$ mit $f(x) = c \cdot a^x$ hängt von $a$ und $c$ ab.

Rechts sind die Graphen von 4 Exponentialfunktionen dargestellt.
Beschrifte die Funktionsgraphen.



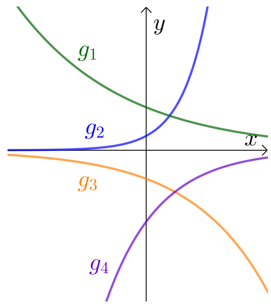

**1)** $f_1(x) = 1{,}2 \cdot 0{,}6^x$ **3)** $f_3(x) = -0{,}8 \cdot 2^x$

**2)** $f_2(x) = 0{,}4 \cdot 7{,}4^x$ **4)** $f_4(x) = -2 \cdot 0{,}4^x$

**Asymptotisches Verhalten von $x \mapsto c \cdot e^{k \cdot x}$**

Das asymptotische Verhalten der Exponentialfunktion $g$ mit $g(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$ hängt von den Vorzeichen von $c$ und $k$ ab.

Rechts sind die Graphen von 4 Exponentialfunktionen dargestellt.
Trage passend zu den Graphen > bzw. < in die Kästchen ein.




**1)** $g_1$: $c \;\square\; 0$ und $k \;\square\; 0$ **3)** $g_3$: $c \;\square\; 0$ und $k \;\square\; 0$

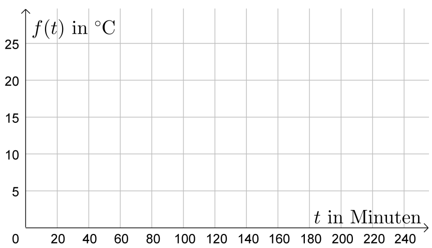
**2)** $g_2$: $c \;\square\; 0$ und $k \;\square\; 0$ **4)** $g_4$: $c \;\square\; 0$ und $k \;\square\; 0$

**Nach oben beschränktes Wachstum**

Du nimmst zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Getränk aus dem Kühlschrank und lässt es geduldig vor dir stehen.
Der Temperaturverlauf des Getränks wird durch die folgende Funktion $f$ modelliert:

$$f(t) = 19 \cdot \left(1 - e^{-0{,}016 \cdot t}\right) + 6$$

$t$ … Zeit in Minuten ($t \geq 0$)
$f(t)$ … Getränketemperatur in °C zum Zeitpunkt $t$




**1)** Berechne die Getränketemperatur nach 0, 30, 60, 90 und 120 Minuten.

| $t$ in Minuten | 0 | 30 | 60 | 90 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ in °C | | | | | |

**2)** Begründe anhand der Funktionsgleichung, welchem Wert die Temperatur beliebig nahe kommt.

**3)** Skizziere rechts oben den Funktionsgraphen von $f$.

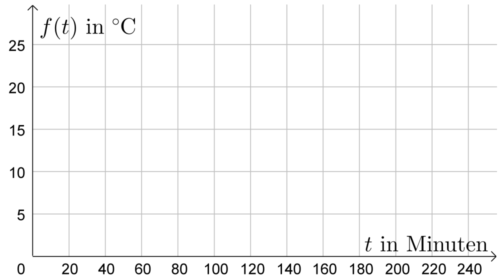
**Nach unten beschränktes Wachstum**

Du stellst zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Getränk in den Kühlschrank.

Der Temperaturverlauf des Getränks wird durch die folgende Funktion $f$ modelliert:

$$f(t) = a \cdot 0{,}984^t + b$$

$t \ldots$ Zeit in Minuten $(t \geq 0)$
$f(t) \ldots$ Getränketemperatur in °C zum Zeitpunkt $t$




Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat das Getränk die Temperatur 25 °C.

Die Temperatur im Kühlschrank ist konstant 5 °C.
Langfristig kommt die Getränketemperatur der Temperatur im Kühlschrank beliebig nahe.

**1)** Berechne $a$ und $b$.

**2)** Berechne die Getränketemperatur nach 0, 30, 60, 90 und 120 Minuten.

| $t$ in Minuten | 0 | 30 | 60 | 90 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ in °C | | | | | |

**3)** Skizziere rechts oben den Funktionsgraphen von $f$.

**Logistisches Wachstum**

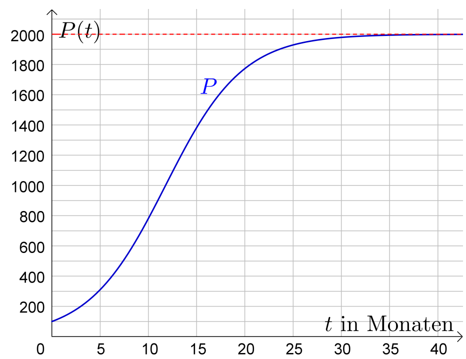
Wir setzen 100 Fische in einen Teich aus. Die Fische finden dort beste Lebensbedingungen vor.

Der Verlauf der Fischpopulation kann dann durch eine **logistische Wachstumsfunktion** modelliert werden:

$$P(t) = \frac{P_0 \cdot K}{P_0 + (K - P_0) \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}}$$

$t \ldots$ Zeit in Monaten $(t \geq 0)$
$P(t) \ldots$ Größe der Fischpopulation zum Zeitpunkt $t$

Der Funktionsgraph von $P$ ist für bestimmte Werte von $P_0$ und $K$ rechts dargestellt.




**1)** Begründe anhand der Funktionsgleichung, warum $P_0 = P(0)$ gilt. $P_0$ ist also die Population zu Beginn.

**2)** Begründe anhand der Funktionsgleichung, warum $K = \lim\limits_{t \to \infty} P(t)$ gilt. $K$ steht für **Kapazitätsgrenze**.

**3)** Lies die Parameter $P_0$ und $K$ aus der Grafik rechts oben ab: $P_0 = \boxed{\phantom{000}}$ $K = \boxed{\phantom{000}}$

**4)** Berechne die Größe der Fischpopulation nach 2 Jahren.