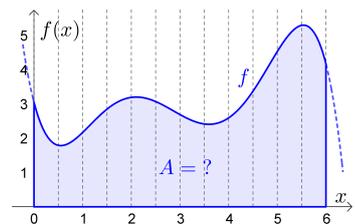
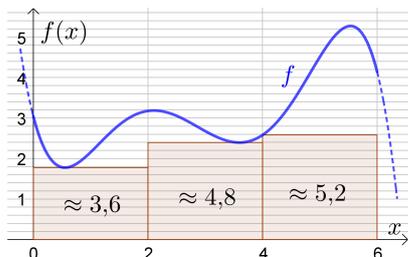


Rechts ist die Fläche markiert, die zwischen der x -Achse und dem Graphen der Funktion f im Intervall $[0; 6]$ liegt.

Wir wollen den Inhalt A dieser Fläche *näherungsweise* ermitteln. Dazu zerschneiden wir die Fläche in n gleich breite vertikale Streifen.



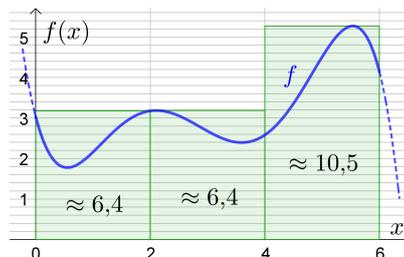
Zeichne die $n = 3$ Rechtecke ein, die wir zur Ermittlung der **Untersumme** U_3 verwenden:



Ermittle die Untersumme U_3 näherungsweise:

$$U_3 \approx 13,6$$

Zeichne die $n = 3$ Rechtecke ein, die wir zur Ermittlung der **Obersumme** O_3 verwenden:



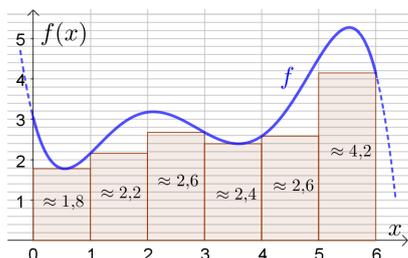
Ermittle die Obersumme O_3 näherungsweise:

$$O_3 \approx 23,3$$

$$U_3 \leq A \leq O_3$$

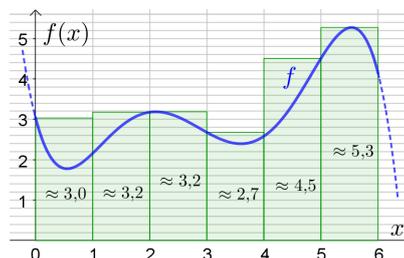
Jetzt verfeinern wir die Zerlegung, indem wir jedes Intervall in der Mitte teilen.

Ermittle die Untersumme U_6 näherungsweise:



$$U_6 \approx 15,8$$

Ermittle die Obersumme O_6 näherungsweise:



$$O_6 \approx 21,9$$

$$U_3 \leq U_6 \leq A \leq O_6 \leq O_3$$

Bestimmtes Integral als Grenzwert von Untersummen und Obersummen



Der Graph einer **stetigen** Funktion f mit $f(x) \geq 0$ ist im Intervall $[0; 6]$ dargestellt.

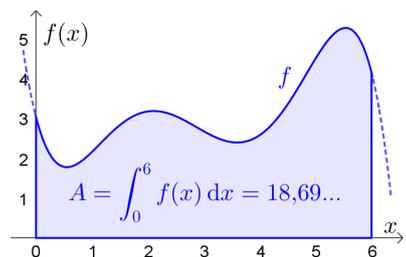
Wir zerlegen das Intervall $[0; 6]$ in n gleich breite Teile.

U_n ist die zugehörige Untersumme.

O_n ist die zugehörige Obersumme.

Der markierte Flächeninhalt A ist sowohl der **Grenzwert** der Untersummen als auch der Grenzwert der Obersummen:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$$

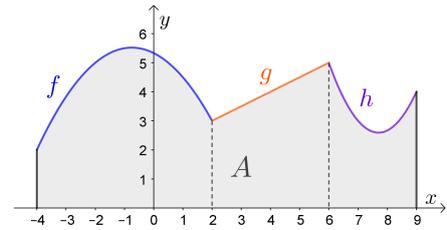


Wir nennen A das **bestimmte Integral** von f in $[0; 6]$ und schreiben: $A = \int_0^6 f(x) dx$

Wenn f eine **Funktion in mehreren Variablen** ist – zum Beispiel $f(x; y; z) = x^2 \cdot y \cdot e^z$ – dann kann man auch die zugehörigen Funktionen $x \mapsto x^2 \cdot y \cdot e^z$ und $y \mapsto x^2 \cdot y \cdot e^z$ und $z \mapsto x^2 \cdot y \cdot e^z$ in einer Variablen untersuchen. Mit dem Ausdruck dx , dy bzw. dz geben wir dann an, von welcher dieser drei Funktionen wir ein bestimmtes Integral berechnen: $\int_0^6 x^2 \cdot y \cdot e^z dx$

Stelle mithilfe der Funktionen f , g und h eine Formel zur Berechnung des grau markierten Flächeninhalts A auf:

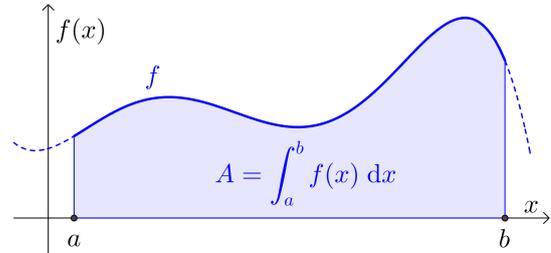
$$A = \int_{-4}^2 f(x) dx + \int_2^6 g(x) dx + \int_6^9 h(x) dx$$



Das bestimmte Integral

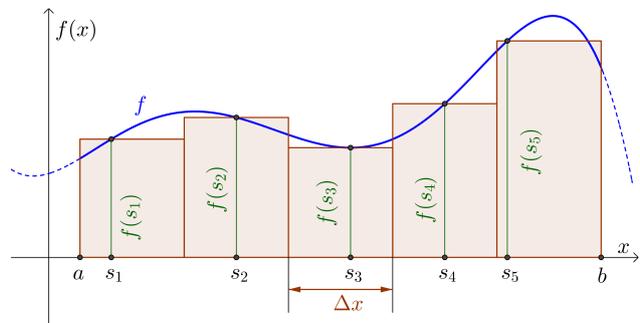
$$\int_a^b f(x) dx$$

kann als Grenzwert von Untersummen und als Grenzwert von Obersummen berechnet werden.



Das bestimmte Integral kann auch als Grenzwert sogenannter **Zwischensummen** berechnet werden:

- 1) Für eine Zwischensumme teilen wir das Intervall $[a; b]$ zum Beispiel in $n = 5$ Teile mit gleicher Breite Δx .
- 2) In jedem Intervall wählen wir eine *beliebige* Stützstelle s_i aus und bilden das Rechteck mit der Höhe $f(s_i)$.



- 3) Dann berechnen wir die Summe Z der Inhalte dieser Rechtecksflächen:

$$Z = f(s_1) \cdot \Delta x + f(s_2) \cdot \Delta x + f(s_3) \cdot \Delta x + f(s_4) \cdot \Delta x + f(s_5) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^5 f(s_i) \cdot \Delta x$$

Für jede Zerlegung des Intervalls $[a; b]$ und jede Wahl der Stützstellen gilt:

$$\text{Untersumme} \leq \text{Zwischensumme} \leq \text{Obersumme}$$

- 4) Um die Annäherung genauer zu machen, teilen wir das Intervall in immer mehr gleich breite Teile. Die Stützstellen wählen wir bei jeder Zerlegung neu. $n \rightarrow \infty$

Wenn f eine stetige Funktion ist, dann ist der Grenzwert dieser Zwischensummen der *orientierte* Flächeninhalt A zwischen dem Funktionsgraphen und der x -Achse im Intervall $[a; b]$, also:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Die Schreibweise \int – als langgezogenes „S“ wie *Summe* – geht auf [Gottfried Wilhelm Leibniz](#) zurück.

(17./18. Jahrhundert)

Der Ausdruck dx erinnert an das Δx aus der Summe $\sum_{i=1}^n f(s_i) \cdot \Delta x$.

Warum orientierter Flächeninhalt? 

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ ist der *orientierte* Flächeninhalt zwischen dem Funktionsgraphen und der x -Achse im Intervall $[a; b]$.

Wenn f *negative* Funktionswerte annimmt, müssen wir aufpassen.

Für die rechts dargestellte Funktion f gilt zum Beispiel:

$$\int_1^{10} f(x) dx \neq A_1 + A_2 + A_3$$

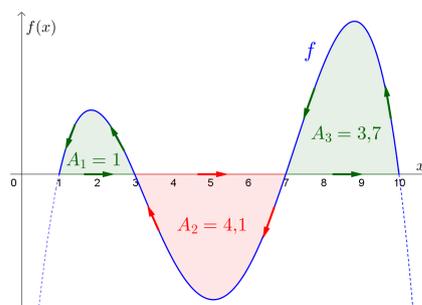
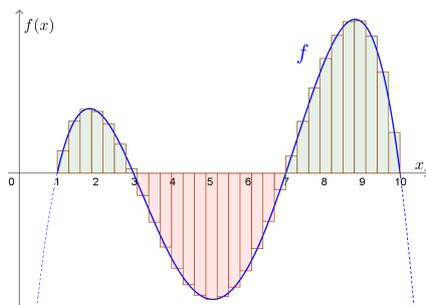
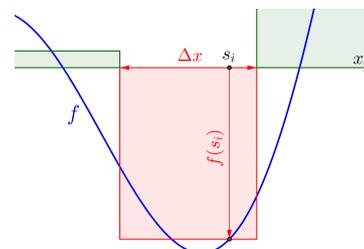
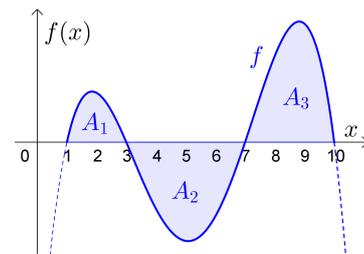
Wenn der Funktionswert an der Stelle s_i negativ ist, dann gilt:

$$f(s_i) \cdot \Delta x < 0$$

Beim bestimmten Integral werden also Flächeninhalte unterhalb der x -Achse mit negativem Vorzeichen berechnet.

Für die positiven Flächeninhalte gilt: $A_1 = 1, A_2 = 4,1, A_3 = 3,7$

Berechne das bestimmte Integral: $\int_1^{10} f(x) dx = 1 - 4,1 + 3,7 = 0,6$



Die Pfeile links deuten an, warum wir von einem *orientierten* Flächeninhalt sprechen.

Flächen oberhalb der x -Achse sind in mathematisch positiver Orientierung – also gegen den Uhrzeigersinn – umrandet.

Flächen unterhalb der x -Achse sind in mathematisch negativer Orientierung – also im Uhrzeigersinn – umrandet.

Dann können wir die gesamte Fläche entlang der Pfeile umrunden.

Bestimmtes Integral einer linearen Funktion 

Rechts ist der Graph einer linearen Funktion f mit der Nullstelle $x = 2$ dargestellt.

1) Ermittle $\int_2^9 f(x) dx$.

2) Berechne den Schnittpunkt von f mit der senkrechten Achse.

3) Ermittle $\int_0^9 f(x) dx$.

1) $\int_2^9 f(x) dx = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14$

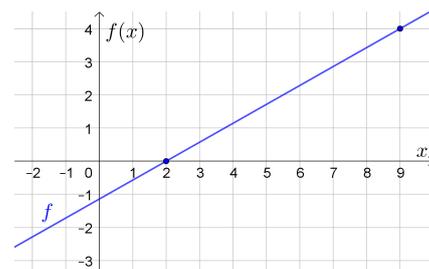
2) Lösungsweg 1: Funktionsgleichung von f ermitteln

Steigung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{7} \implies f(x) = \frac{4}{7} \cdot (x - 2) = \frac{4}{7} \cdot x - \frac{8}{7} \implies$ Schnittpunkt $(0 \mid -\frac{8}{7})$

Lösungsweg 2: Ähnliche Dreiecke

$\frac{x}{4} = \frac{2}{7} \implies x = \frac{8}{7} \implies$ Schnittpunkt $(0 \mid -\frac{8}{7})$

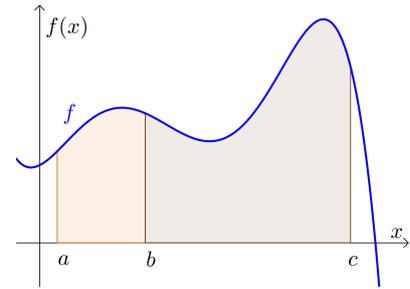
3) $\int_0^2 f(x) dx = -\frac{2 \cdot \frac{8}{7}}{2} = -\frac{8}{7} \implies \int_0^9 f(x) dx = 14 - \frac{8}{7} = \frac{90}{7} = 12,85\dots$





Das bestimmte Integral hat die folgenden Eigenschaften:

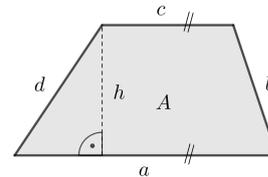
- 1) $\int_a^a f(x) dx = 0$
- 2) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ mit $a \leq b \leq c$
- 3) $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$ mit $c \in \mathbb{R}$



Wir erklären Eigenschaft **3)** für eine lineare Funktion f .

Erinnere dich, dass für den Flächeninhalt A vom Trapez gilt:

$$A = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$$



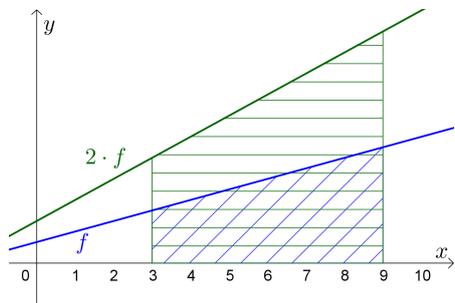
Erkläre damit, warum die folgende Gleichung für die rechts dargestellte lineare Funktion f gilt:

$$\int_3^9 2 \cdot f(x) dx = 2 \cdot \int_3^9 f(x) dx$$

Die beiden Trapeze haben die gleiche Höhe.
Die parallelen Seiten im grünen Trapez sind jeweils doppelt so lang wie im blauen Trapez.

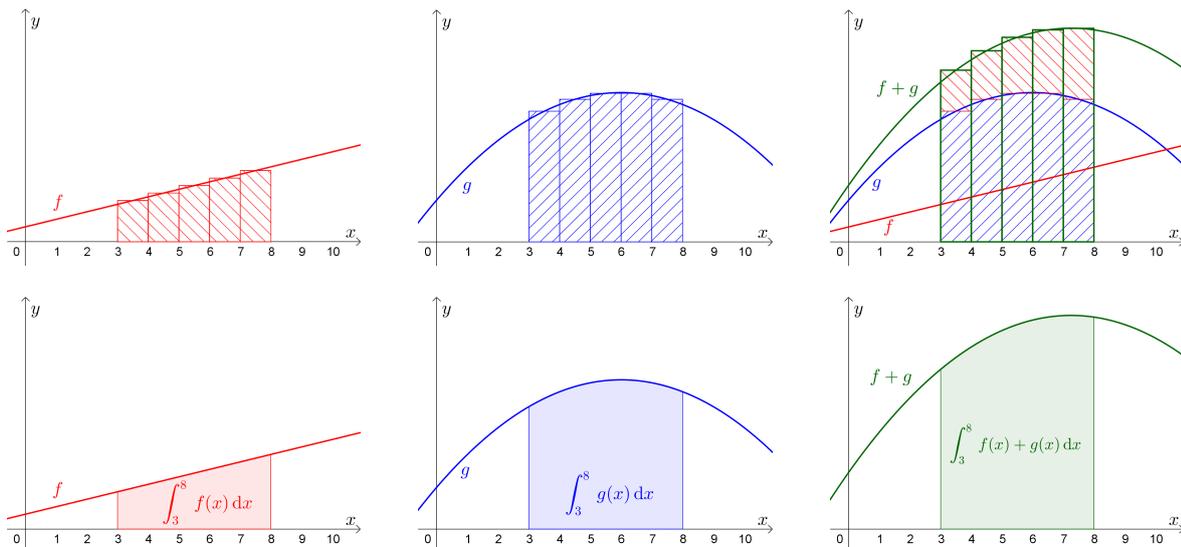
Wenn in der Trapezformel a und c jeweils verdoppelt wird und h gleich bleibt, dann wird A verdoppelt.

$$\Rightarrow \int_3^9 2 \cdot f(x) dx = A_{\text{Grün}} = 2 \cdot A_{\text{Blau}} = 2 \cdot \int_3^9 f(x) dx$$



$$4) \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Mache dir diese Eigenschaft des bestimmten Integrals anhand der folgenden Abbildungen plausibel:



Im Allgemeinen gilt: $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$ bzw. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$



Geschwindigkeit-Zeit-Funktion

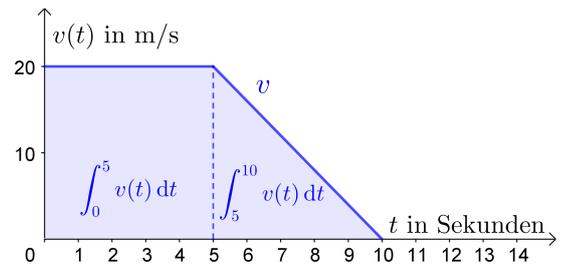


Die Geschwindigkeit eines Autos wird 10 Sekunden lang aufgezeichnet.

Der Graph dieser Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist rechts dargestellt.

t ... Zeit in Sekunden ($t \geq 0$)

$v(t)$... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in m/s



- 1) Im Zeitintervall $[0; 5]$ fährt das Auto mit der konstanten Geschwindigkeit **20** m/s. Im Zeitintervall $[0; 5]$ legt das Auto also insgesamt **100** m zurück.

Dieser zurückgelegte Weg ist genau der Flächeninhalt, den der Funktionsgraph von v in $[0; 5]$ mit der waagrechten Achse einschließt:

$$\int_0^5 v(t) dt = 5 \text{ s} \cdot 20 \text{ m/s} = 100 \text{ m}$$

- 2) Ermittle $\int_0^{10} v(t) dt$ und interpretiere das Ergebnis.

$$\int_5^{10} v(t) dt = \frac{5 \cdot 20}{2} = 50 \implies \int_0^{10} v(t) dt = 100 + 50 = 150$$

Das Auto legt im Zeitintervall $[0; 10]$ insgesamt **150** m zurück.

Allgemein ist die Einheit des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x) dx$ stets das Produkt der Einheit auf der waagrechten Achse und der Einheit auf der senkrechten Achse. Mehr dazu findest du am [AB – Physikalische Anwendungen der Differential- und Integralrechnung](#).

Umkehraufgabe



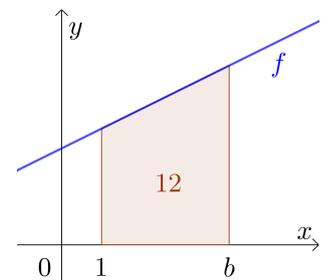
Für die rechts dargestellte lineare Funktion f gilt: $f(x) = 0,5 \cdot x + 2,45$

Berechne jene Zahl $b > 1$, für die $\int_1^b f(x) dx = 12$ gilt.

Das bestimmte Integral ist der Flächeninhalt von einem Trapez.

Höhe: $h = b - 1$

Parallele Seiten: $a = f(1) = 2,95$ und $c = f(b) = 0,5 \cdot b + 2,45$



$$A = \frac{(a + c) \cdot h}{2} = \frac{(5,4 + 0,5 \cdot b) \cdot (b - 1)}{2} = \frac{0,5 \cdot b^2 + 4,9 \cdot b - 5,4}{2}$$

$$A = 12 \iff 0,5 \cdot b^2 + 4,9 \cdot b - 5,4 = 24 \iff 0,5 \cdot b^2 + 4,9 \cdot b - 29,4 = 0$$

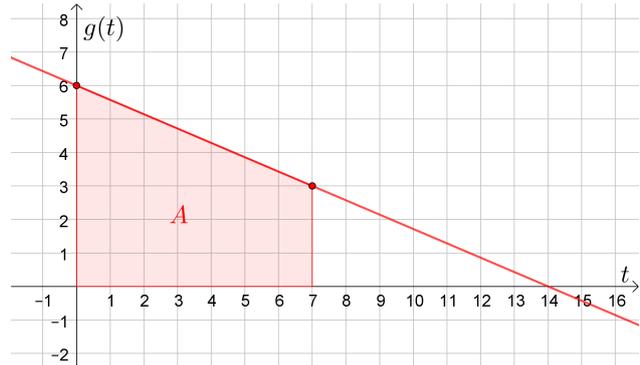
Die quadratische Gleichung hat die Lösungen $b_1 = 4,2$ und $b_2 = -14$.

Die gesuchte Zahl ist also $b = 4,2$.

1) Zeichne den Graphen der Funktion g mit

$$g(t) = -\frac{3}{7} \cdot t + 6$$

im Koordinatensystem rechts ein.



2) Ermittle $A = \int_0^7 g(t) dt$.

$$A = \frac{[g(0) + g(7)] \cdot 7}{2} = \frac{[6 + 3] \cdot 7}{2} = 31,5$$

Die Funktion G mit $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ ist eine sogenannte **Integralfunktion** von g .

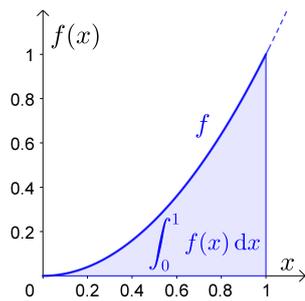
Tatsächlich ist G eine **Stammfunktion** von g . Mehr dazu findest du am **AB – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**.

3) Es gilt zum Beispiel: $G(7) = 31,5$

4) An welcher Stelle $x > 0$ hat die Funktion G den größten Funktionswert? Wie groß ist er?

$$g(t) = 0 \implies t = 14 \implies G(14) = \int_0^{14} g(t) dt = \frac{14 \cdot 6}{2} = 42$$

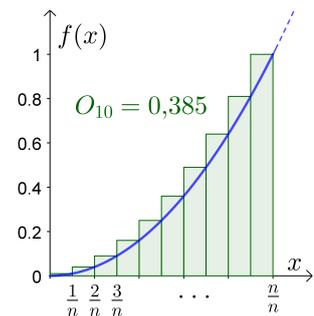
Integrieren ohne Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung  **MmF**



Für die Funktion f mit $f(x) = x^2$ gilt:

$$0 < \int_0^1 f(x) dx < 0,5 \quad \text{Warum?}$$

Wir berechnen den *exakten* Wert von $\int_0^1 f(x) dx$ als Grenzwert von Obersummen:



$$O_n = \Delta x \cdot \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]$$

$$O_n = \frac{1}{n} \cdot \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] = \frac{1}{n^3} \cdot [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2]$$

Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{2 \cdot n^3 + 3 \cdot n^2 + n}{6}$

$$\implies O_n = \frac{2 \cdot n^3 + 3 \cdot n^2 + n}{6 \cdot n^3} \quad \text{Überprüfe die Formel für } O_1 \text{ und } O_2.$$

$$\implies \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^3} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{6 \cdot \cancel{n^3}} = \frac{2 + 0 + 0}{6} = \frac{1}{3}$$

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** ermöglicht die Berechnung von $\int_0^1 x^2 dx$ mit einem Fingerschnipsen.

