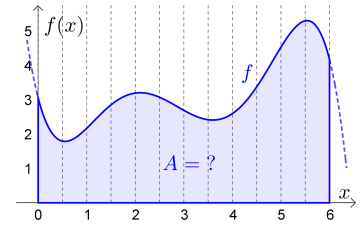
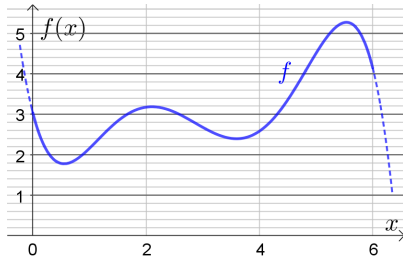


Rechts ist die Fläche markiert, die zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen der Funktion  $f$  im Intervall  $[0; 6]$  liegt.

Wir wollen den Inhalt  $A$  dieser Fläche *näherungsweise* ermitteln.  
Dazu zerschneiden wir die Fläche in  $n$  gleich breite vertikale Streifen.



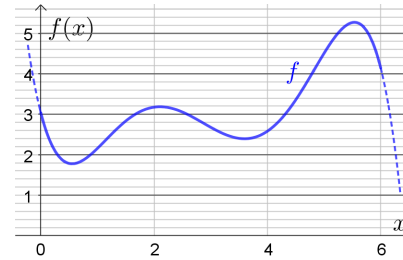
Zeichne die  $n = 3$  Rechtecke ein, die wir zur Ermittlung der **Untersumme**  $U_3$  verwenden:



Ermittle die Untersumme  $U_3$  näherungsweise:

$$U_3 \approx \boxed{\phantom{000}}$$

Zeichne die  $n = 3$  Rechtecke ein, die wir zur Ermittlung der **Obersumme**  $O_3$  verwenden:



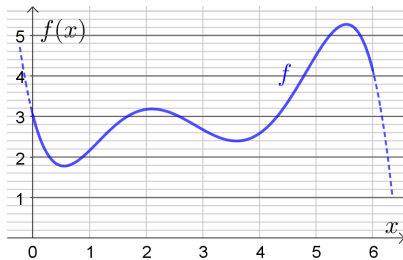
Ermittle die Obersumme  $O_3$  näherungsweise:

$$O_3 \approx \boxed{\phantom{000}}$$

$$U_3 \leq A \leq O_3$$

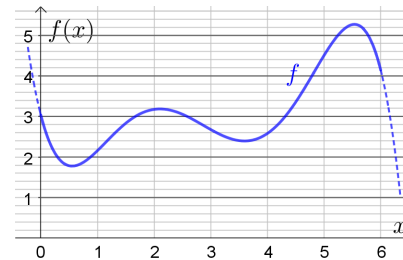
Jetzt verfeinern wir die Zerlegung, indem wir jedes Intervall in der Mitte teilen.

Ermittle die Untersumme  $U_6$  näherungsweise:



$$U_6 \approx \boxed{\phantom{000}}$$

Ermittle die Obersumme  $O_6$  näherungsweise:



$$O_6 \approx \boxed{\phantom{000}}$$

$$U_3 \leq U_6 \leq A \leq O_6 \leq O_3$$

**Bestimmtes Integral als Grenzwert von Untersummen und Obersummen** 

Der Graph einer **stetigen** Funktion  $f$  mit  $f(x) \geq 0$  ist im Intervall  $[0; 6]$  dargestellt.

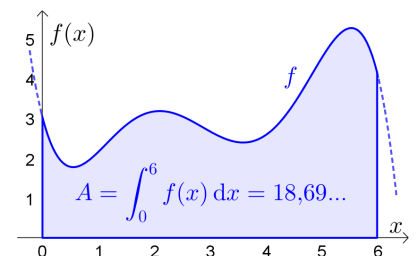
Wir zerlegen das Intervall  $[0; 6]$  in  $n$  gleich breite Teile.

$U_n$  ist die zugehörige Untersumme.

$O_n$  ist die zugehörige Obersumme.

Der markierte Flächeninhalt  $A$  ist sowohl der **Grenzwert** der Untersummen als auch der Grenzwert der Obersummen:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$$

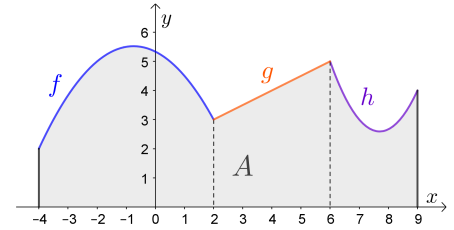


Wir nennen  $A$  das **bestimmte Integral** von  $f$  in  $[0; 6]$  und schreiben:  $A = \int_0^6 f(x) dx$

Wenn  $f$  eine **Funktion in mehreren Variablen** ist – zum Beispiel  $f(x; y; z) = x^2 \cdot y \cdot e^z$  – dann kann man auch die zugehörigen Funktionen  $x \mapsto x^2 \cdot y \cdot e^z$  und  $y \mapsto x^2 \cdot y \cdot e^z$  und  $z \mapsto x^2 \cdot y \cdot e^z$  in einer Variablen untersuchen. Mit dem Ausdruck  $dx$ ,  $dy$  bzw.  $dz$  geben wir dann an, von welcher dieser drei Funktionen wir ein bestimmtes Integral berechnen:  $\int_0^6 x^2 \cdot y \cdot e^z d[\ ]$

Stelle mithilfe der Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  eine Formel zur Berechnung des grau markierten Flächeninhalts  $A$  auf:

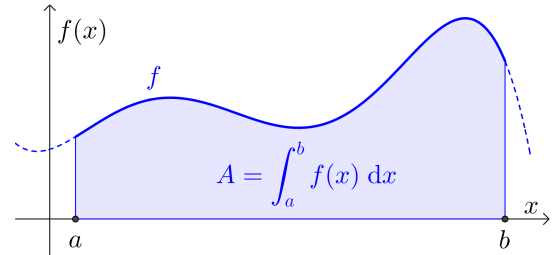
$A =$



Das bestimmte Integral

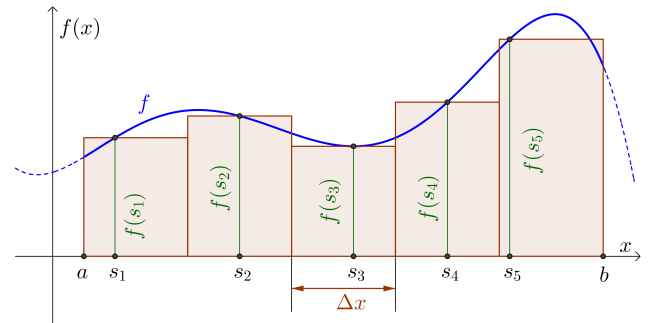
$$\int_a^b f(x) dx$$

kann als Grenzwert von Untersummen und als Grenzwert von Obersummen berechnet werden.



Das bestimmte Integral kann auch als Grenzwert sogenannter **Zwischensummen** berechnet werden:

- 1) Für eine Zwischensumme teilen wir das Intervall  $[a; b]$  zum Beispiel in  $n = 5$  Teile mit gleicher Breite  $\Delta x$ .
- 2) In jedem Intervall wählen wir eine *beliebige* Stützstelle  $s_i$  aus und bilden das Rechteck mit der Höhe  $f(s_i)$ .



- 3) Dann berechnen wir die Summe  $Z$  der Inhalte dieser Rechtecksflächen:

$$Z = f(s_1) \cdot \Delta x + f(s_2) \cdot \Delta x + f(s_3) \cdot \Delta x + f(s_4) \cdot \Delta x + f(s_5) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^5 f(s_i) \cdot \Delta x$$

Für jede Zerlegung des Intervalls  $[a; b]$  und jede Wahl der Stützstellen gilt:

$$\text{Untersumme} \leq \text{Zwischensumme} \leq \text{Obersumme}$$

- 4) Um die Annäherung genauer zu machen, teilen wir das Intervall in immer mehr gleich breite Teile. Die Stützstellen wählen wir bei jeder Zerlegung neu.  $n \rightarrow \infty$

Wenn  $f$  eine stetige Funktion ist, dann ist der Grenzwert dieser Zwischensummen der *orientierte* Flächeninhalt  $A$  zwischen dem Funktionsgraphen und der  $x$ -Achse im Intervall  $[a; b]$ , also:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Die Schreibweise  $\int$  – als langgezogenes „S“ wie *Summe* – geht auf **Gottfried Wilhelm Leibniz** zurück.

(17./18. Jahrhundert)

Der Ausdruck  $dx$  erinnert an das  $\Delta x$  aus der Summe  $\sum_{i=1}^n f(s_i) \cdot \Delta x$ .

Warum orientierter Flächeninhalt?



Das bestimmte Integral  $\int_a^b f(x) dx$  ist der *orientierte* Flächeninhalt zwischen dem Funktionsgraphen und der  $x$ -Achse im Intervall  $[a; b]$ .

Wenn  $f$  *negative* Funktionswerte annimmt, müssen wir aufpassen.

Für die rechts dargestellte Funktion  $f$  gilt zum Beispiel:

$$\int_1^{10} f(x) dx \neq A_1 + A_2 + A_3$$

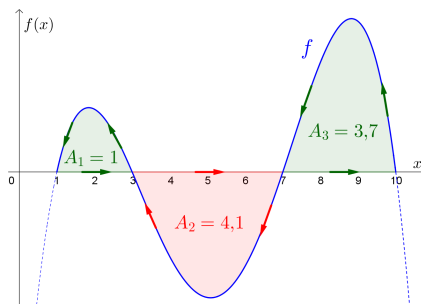
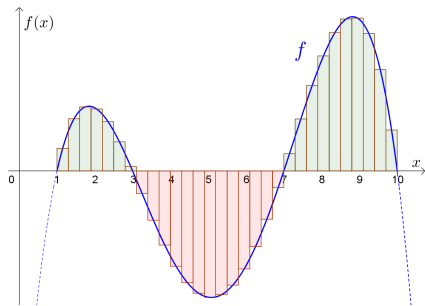
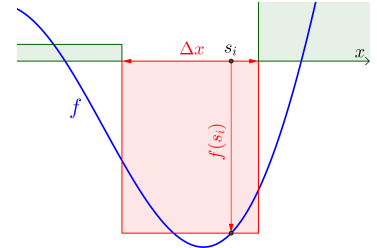
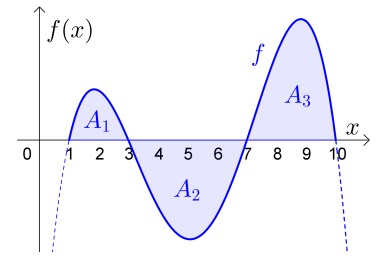
Wenn der Funktionswert an der Stelle  $s_i$  negativ ist, dann gilt:

$$f(s_i) \cdot \Delta x < 0$$

Beim bestimmten Integral werden also Flächeninhalte unterhalb der  $x$ -Achse mit negativem Vorzeichen berechnet.

Für die positiven Flächeninhalte gilt:  $A_1 = 1, A_2 = 4,1, A_3 = 3,7$

Berechne das bestimmte Integral:  $\int_1^{10} f(x) dx =$



Die Pfeile links deuten an, warum wir von einem *orientierten* Flächeninhalt sprechen.

Flächen oberhalb der  $x$ -Achse sind in mathematisch positiver Orientierung – also gegen den Uhrzeigersinn – umrandet.

Flächen unterhalb der  $x$ -Achse sind in mathematisch negativer Orientierung – also im Uhrzeigersinn – umrandet.

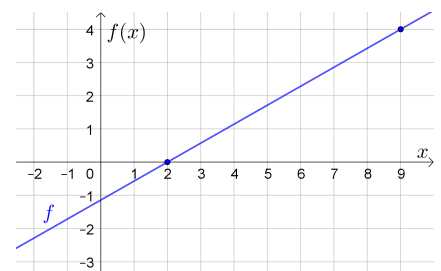
Dann können wir die gesamte Fläche entlang der Pfeile umrunden.

Bestimmtes Integral einer linearen Funktion



Rechts ist der Graph einer linearen Funktion  $f$  mit der Nullstelle  $x = 2$  dargestellt.

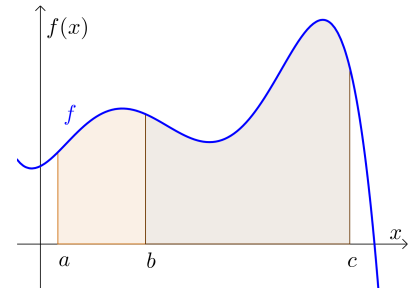
- 1) Ermittle  $\int_2^9 f(x) dx$ .
- 2) Berechne den Schnittpunkt von  $f$  mit der senkrechten Achse.
- 3) Ermittle  $\int_0^9 f(x) dx$ .





Das bestimmte Integral hat die folgenden Eigenschaften:

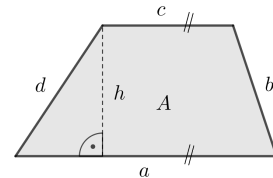
- 1)  $\int_a^a f(x) dx = 0$
- 2)  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$  mit  $a \leq b \leq c$
- 3)  $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$  mit  $c \in \mathbb{R}$



Wir erklären Eigenschaft **3)** für eine lineare Funktion  $f$ .

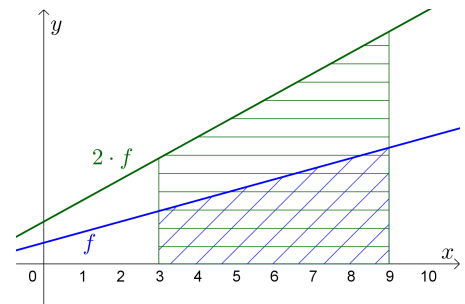
Erinnere dich, dass für den Flächeninhalt  $A$  vom Trapez gilt:

$$A = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$$



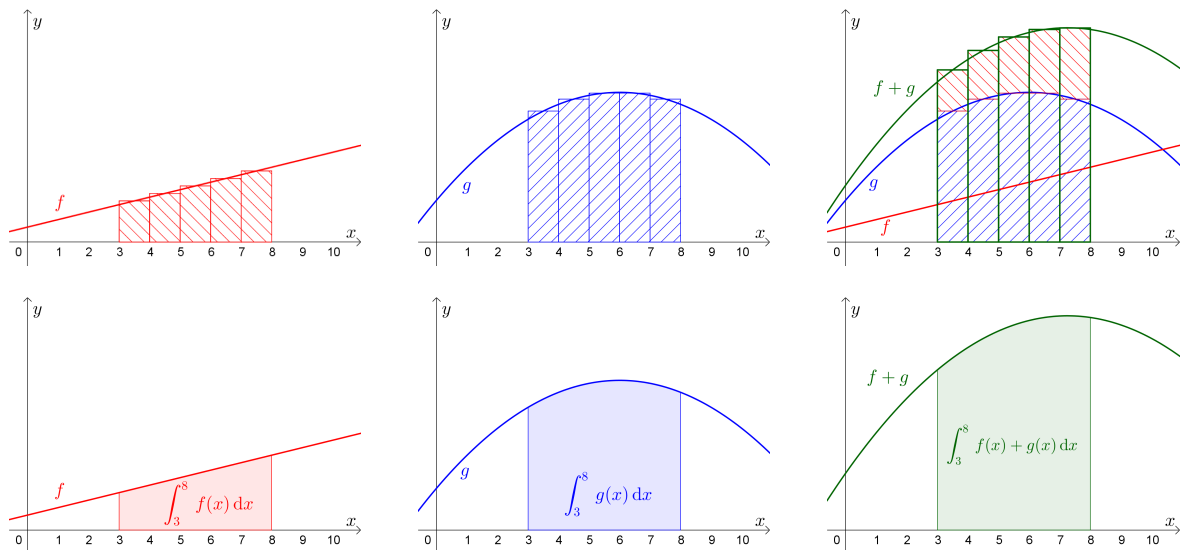
Erkläre damit, warum die folgende Gleichung für die rechts dargestellte lineare Funktion  $f$  gilt:

$$\int_3^9 2 \cdot f(x) dx = 2 \cdot \int_3^9 f(x) dx$$



$$4) \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Mache dir diese Eigenschaft des bestimmten Integrals anhand der folgenden Abbildungen plausibel:



Im Allgemeinen gilt:  $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$  bzw.  $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$

Geschwindigkeit-Zeit-Funktion

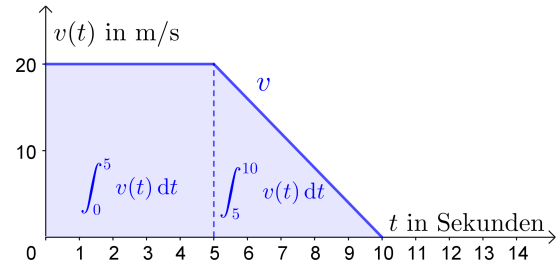


Die Geschwindigkeit eines Autos wird 10 Sekunden lang aufgezeichnet.

Der Graph dieser Geschwindigkeit-Zeit-Funktion  $v$  ist rechts dargestellt.

$t$  ... Zeit in Sekunden ( $t \geq 0$ )

$v(t)$  ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  in m/s



1) Im Zeitintervall  $[0; 5]$  fährt das Auto mit der konstanten Geschwindigkeit  m/s.

Im Zeitintervall  $[0; 5]$  legt das Auto also insgesamt  m zurück.

Dieser zurückgelegte Weg ist genau der Flächeninhalt, den der Funktionsgraph von  $v$  in  $[0; 5]$  mit der waagrechten Achse einschließt:

$$\int_0^5 v(t) dt = \text{ s} \cdot \text{ m/s} = \text{ m}$$

2) Ermittle  $\int_0^{10} v(t) dt$  und interpretiere das Ergebnis.

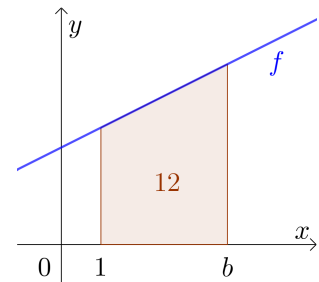
Allgemein ist die Einheit des bestimmten Integrals  $\int_a^b f(x) dx$  stets das Produkt der Einheit auf der waagrechten Achse und der Einheit auf der senkrechten Achse. Mehr dazu findest du am [AB – Physikalische Anwendungen der Differential- und Integralrechnung](#).

Umkehraufgabe



Für die rechts dargestellte lineare Funktion  $f$  gilt:  $f(x) = 0,5 \cdot x + 2,45$

Berechne jene Zahl  $b > 1$ , für die  $\int_1^b f(x) dx = 12$  gilt.

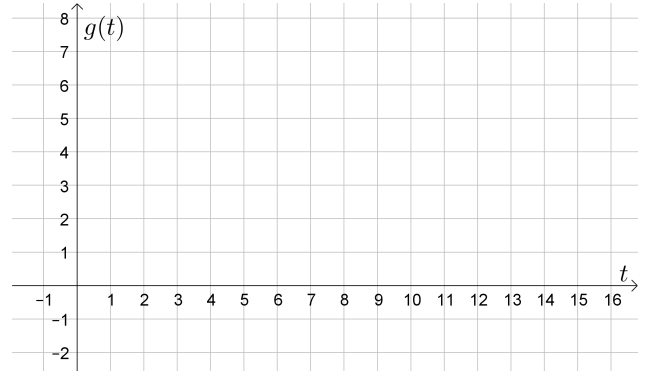


1) Zeichne den Graphen der Funktion  $g$  mit

$$g(t) = -\frac{3}{7} \cdot t + 6$$

im Koordinatensystem rechts ein.

2) Ermittle  $A = \int_0^7 g(t) dt$ .




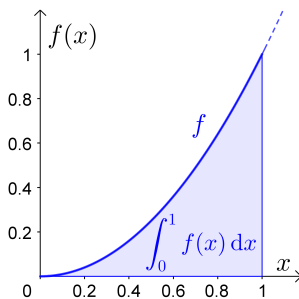
Die Funktion  $G$  mit  $G(x) = \int_0^x g(t) dt$  ist eine sogenannte **Integrfunktion** von  $g$ .

Tatsächlich ist  $G$  eine **Stammfunktion** von  $g$ . Mehr dazu findest du am **AB – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**.

3) Es gilt zum Beispiel:  $G(7) = \boxed{\phantom{000}}$

4) An welcher Stelle  $x > 0$  hat die Funktion  $G$  den größten Funktionswert? Wie groß ist er?

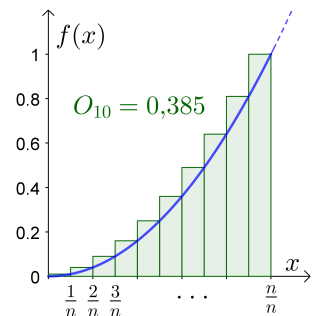
Integrieren ohne Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 



Für die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$  gilt:

$$0 < \int_0^1 f(x) dx < 0,5 \quad \text{Warum?}$$

Wir berechnen den *exakten* Wert von  $\int_0^1 f(x) dx$  als Grenzwert von Obersummen:



$$O_n = \Delta x \cdot \left[ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]$$

$$O_n = \frac{1}{n} \cdot \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] = \frac{1}{n^3} \cdot [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2]$$

Für die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen gilt:  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{2 \cdot n^3 + 3 \cdot n^2 + n}{6}$

$$\implies O_n = \frac{2 \cdot n^3 + 3 \cdot n^2 + n}{6 \cdot n^3} \quad \text{Überprüfe die Formel für } O_1 \text{ und } O_2.$$

$$\implies \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^3} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{6 \cdot \cancel{n^3}} = \frac{2 + 0 + 0}{6} = \frac{1}{3}$$

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** ermöglicht die Berechnung von  $\int_0^1 x^2 dx$  mit einem Fingerschnipsen.