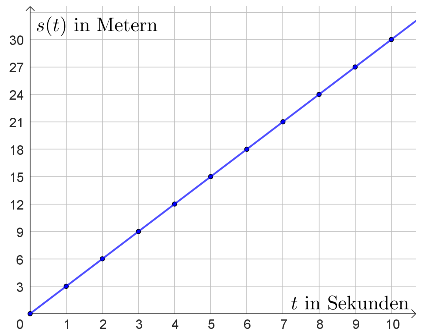
Konstante Geschwindigkeit

Adrian läuft mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 3\,\text{m/s}$.
Pro Sekunde legt er also 3 Meter zurück.
In t Sekunden legt er also insgesamt $3 \cdot t$ Meter zurück.
Rechts ist der Funktionsgraph seiner Weg-Zeit-Funktion s mit

$$s(t) = 3 \cdot t$$

in einem Koordinatensystem dargestellt.
$t \ldots$ Zeit in Sekunden $(t \geq 0)$
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg in Metern im Zeitintervall $[0; t]$



Die konstante Steigung dieser linearen Funktion ist die konstante Geschwindigkeit $3\,\text{m/s}$.

Konstante Geschwindigkeit

Bei Bewegungen mit **konstanter Geschwindigkeit v** gelten für den zurückgelegten Weg s und die dafür benötigte Zeit t die folgenden Zusammenhänge:

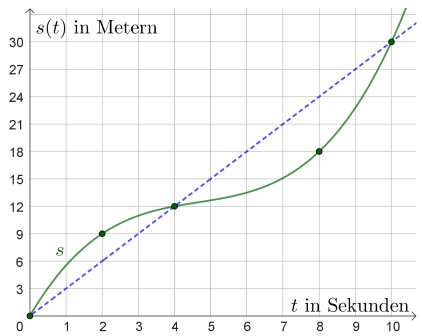
$$\boldsymbol{s = v \cdot t} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{v = \frac{s}{t}}$$

Du kannst dir die Formel auch anhand der Einheiten merken: $[v] = \text{m/s} = \frac{[s]}{[t]}$

Mittlere Geschwindigkeit

Tara läuft *nicht* mit konstanter Geschwindigkeit.
Rechts ist der Graph ihrer Weg-Zeit-Funktion s dargestellt.
Ermittle die Werte in der Tabelle. Schreibe jeweils die Einheit dazu.

Zeitintervall	Zurückgelegter Weg Δs	Benötigte Zeit Δt	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
$[0; 10]$	$30\,\text{m}$	$10\,\text{s}$	$3\,\text{m/s}$
$[0; 4]$	$12\,\text{m}$	$4\,\text{s}$	$3\,\text{m/s}$
$[4; 10]$	$18\,\text{m}$	$6\,\text{s}$	$3\,\text{m/s}$
$[0; 2]$	$9\,\text{m}$	$2\,\text{s}$	$4{,}5\,\text{m/s}$
$[4; 8]$	$6\,\text{m}$	$4\,\text{s}$	$1{,}5\,\text{m/s}$



Für die **mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$** im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ gilt allgemein:

$$\boldsymbol{\bar{v} = \frac{\textbf{Zurückgelegter Weg}}{\textbf{Benötigte Zeit}} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Meter pro Sekunde ↔ Kilometer pro Stunde

Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein, um die Einheiten umzurechnen.

$$5\,\text{m/s} = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \underbrace{\frac{1\,\text{km}}{1000\,\text{m}}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{3600\,\text{s}}{1\,\text{h}}}_{=1} = 18\,\text{km/h}$$

$$72\,\text{km/h} = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \underbrace{\frac{1000\,\text{m}}{1\,\text{km}}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{1\,\text{h}}{3600\,\text{s}}}_{=1} = 20\,\text{m/s}$$

Allgemein gilt also:

$$\text{m/s} \underset{:\,3,6}{\overset{\cdot\,3,6}{\rightleftarrows}} \text{km/h}$$

Gleichungssystem

Jonas läuft eine s_J Meter lange Strecke in t_J Sekunden mit der konstanten Geschwindigkeit v_J.
Elena läuft eine s_E Meter lange Strecke in t_E Sekunden mit der konstanten Geschwindigkeit v_E.
Dabei gelten alle Gleichungen im angegebenen Gleichungssystem mit 6 Gleichungen und 6 Variablen:

$$\begin{aligned}
\text{I}: &\quad s_J = v_J \cdot t_J \\
\text{II}: &\quad s_E = v_E \cdot t_E \\
\text{III}: &\quad v_J = v_E - 1 \\
\text{IV}: &\quad t_J = 15 \\
\text{V}: &\quad s_J = s_E + 15 \\
\text{VI}: &\quad t_J = t_E \cdot 1{,}5
\end{aligned}$$

1) Streiche bei den Aussagen unten so Wörter durch, dass sie jeweils einer der Gleichungen entsprechen.

2) Löse das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren.

- Jonas läuft um 1 m/s ~~schneller~~/langsamer als Elena.
- Die Laufzeit von Jonas/~~Elena~~ beträgt 15 s.
- Die Strecke von Jonas/~~Elena~~ ist um 15 m länger als die Strecke von ~~Jonas~~/Elena .
- Die Laufzeit von Jonas/~~Elena~~ ist um 50 % größer als die Laufzeit von ~~Jonas~~/Elena .

$$\begin{aligned}
\text{I}: &\quad s_J = v_J \cdot 15 \\
\text{II}: &\quad s_E = v_E \cdot t_E \\
\text{III}: &\quad v_J = v_E - 1 \\
\text{V}: &\quad s_J = s_E + 15 \\
\text{VI}: &\quad 15 = t_E \cdot 1{,}5 \implies t_E = 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I}: &\quad s_J = v_J \cdot 15 \\
\text{II}: &\quad s_E = v_E \cdot 10 \\
\text{III}: &\quad v_J = v_E - 1 \\
\text{V}: &\quad s_J = s_E + 15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I}: &\quad s_J = (v_E - 1) \cdot 15 \\
\text{II}: &\quad s_E = v_E \cdot 10 \\
\text{V}: &\quad s_J = s_E + 15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I}: &\quad s_J = 15 \cdot v_E - 15 \\
\text{V}: &\quad s_J = v_E \cdot 10 + 15
\end{aligned}$$

$$\overset{\text{V}}{\implies} 15 \cdot v_E - 15 = v_E \cdot 10 + 15 \implies 5 \cdot v_E = 30 \implies v_E = 6$$

$$\overset{\text{I}}{\implies} s_J = 15 \cdot 6 - 15 = 75 \overset{\text{II}}{\implies} s_E = 6 \cdot 10 = 60 \overset{\text{III}}{\implies} v_J = 6 - 1 = 5$$

Jonas läuft eine 75 Meter lange Strecke in 15 Sekunden mit der konstanten Geschwindigkeit 5 m/s.
Elena läuft eine 60 Meter lange Strecke in 10 Sekunden mit der konstanten Geschwindigkeit 6 m/s.

Hinweis: Du kannst auch gleichzeitig mehrere Gleichungen auswählen, die jeweils nach einer anderen Variable umgeformt sind. Die rechten Seiten der ausgewählten Gleichungen dürfen dann aber keine der ausgewählten Variablen enthalten.
Zum Beispiel kannst du oben im ersten Schritt gleichzeitig III, IV und V auswählen, um die Variablen v_J, t_J und s_J zu eliminieren. Dann wird aus dem 6×6 - Gleichungssystem direkt ein 3×3 - Gleichungssystem in den Variablen v_E, t_E und s_E.

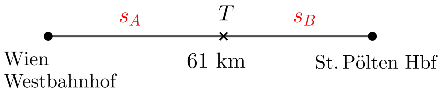
Treffpunkt

Die Zugstrecke zwischen *Wien Westbahnhof* und *St. Pölten Hbf* ist 61 km lang.

- Um 8:36 Uhr fährt Zug A von Wien Westbahnhof in Richtung St. Pölten Hbf los.
  Um 8:42 Uhr fährt Zug B von St. Pölten Hbf in Richtung Wien Westbahnhof los.
- Von der Abfahrt bis zum Treffpunkt T fährt Zug A eine s_A Kilometer lange Strecke in t_A Stunden mit der mittleren Geschwindigkeit $v_A = 110\,\text{km/h}$.
- Von der Abfahrt bis zum Treffpunkt T fährt Zug B eine s_B Kilometer lange Strecke in t_B Stunden mit der mittleren Geschwindigkeit $v_B = 140\,\text{km/h}$.

1) Vervollständige unten das Gleichungssystem mit 6 Gleichungen und 6 Variablen.

2) Löse das Gleichungssystem. Zu welcher Uhrzeit fahren die Züge aneinander vorbei?



$$
\begin{aligned}
\text{I}: &\quad s_A = v_A \cdot t_A \\
\text{II}: &\quad s_B = v_B \cdot t_B \\
\text{III}: &\quad v_A = 110 \\
\text{IV}: &\quad v_B = 140 \\
\text{V}: &\quad s_A + s_B = 61 \implies s_A = 61 - s_B \\
\text{VI}: &\quad t_A = t_B + 0{,}1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{I}: &\quad 61 - s_B = 110 \cdot (t_B + 0{,}1) \\
\text{II}: &\quad s_B = 140 \cdot t_B
\end{aligned}
$$

$$\overset{\text{I}}{\Longrightarrow} \quad 61 - 140 \cdot t_B = 110 \cdot t_B + 11 \implies 50 = 250 \cdot t_B \implies t_B = 0{,}2$$

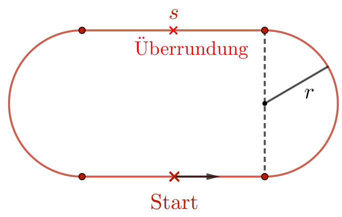
$$\overset{\text{II}}{\Longrightarrow} \quad s_B = 140 \cdot 0{,}2 = 28 \quad \overset{\text{V}}{\Longrightarrow} \quad s_A = 61 - s_B = 33 \quad \overset{\text{VI}}{\Longrightarrow} \quad t_A = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$$

Bis zum Treffpunkt fährt Zug A eine 33 Kilometer lange Strecke in 0,3 Stunden mit der mittleren Geschwindigkeit 110 km/h.

Bis zum Treffpunkt fährt Zug B eine 28 Kilometer lange Strecke in 0,2 Stunden mit der mittleren Geschwindigkeit 140 km/h.

Die Züge fahren um 8:54 Uhr aneinander vorbei.

Überrundung



Die rechts dargestellte Laufbahn um einen Sportplatz besteht aus zwei Strecken mit der Länge $s = 120\,\text{m}$ und zwei Halbkreisen mit dem Radius $r = \frac{150}{\pi}\,\text{m}$.

1) Berechne die Gesamtlänge ℓ der Laufbahn.

$$\ell = 2 \cdot s + 2 \cdot \pi \cdot r = 540\,\text{m}$$

Cornelia und Lukas starten gleichzeitig vom Start und laufen gegen den Uhrzeigersinn.

- Nach 4 Minuten 30 Sekunden wird Lukas von Cornelia erstmals überrundet.
  Das heißt: Cornelia ist bis zu diesem Zeitpunkt genau eine Runde mehr gelaufen als Lukas.
- Die mittlere Geschwindigkeit von Cornelia ist bis zu diesem Zeitpunkt um 40 % größer als die mittlere Geschwindigkeit von Lukas.

2) Berechne die mittlere Geschwindigkeit von Cornelia bzw. Lukas vom Start bis zur Überrundung.

3) Zeichne rechts oben jenen Punkt auf der Laufbahn ein, in dem diese Überrundung stattfindet.

s_C, s_L … gelaufene Strecke bis zur Überrundung in m
t_C, t_L … Laufzeit bis zur Überrundung in s
v_C, v_L … mittlere Geschwindigkeit bis zur Überrundung in m/s

$$\begin{aligned}
\text{I}: &\quad s_C = v_C \cdot t_C \\
\text{II}: &\quad s_L = v_L \cdot t_L \\
\text{III}: &\quad t_C = 270 \\
\text{IV}: &\quad t_L = 270 \\
\text{V}: &\quad s_C = s_L + 540 \\
\text{VI}: &\quad v_C = v_L \cdot 1{,}4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I}: &\quad s_L + 540 = v_L \cdot 1{,}4 \cdot 270 \\
\text{II}: &\quad s_L = v_L \cdot 270
\end{aligned}$$

$$\xRightarrow{\text{I}} \; v_L \cdot 270 + 540 = v_L \cdot 378 \implies 540 = 108 \cdot v_L \implies v_L = 5$$

$$\xRightarrow{\text{II}} \; s_L = 5 \cdot 270 = 1350 \xRightarrow{\text{V}} s_C = 1350 + 540 = 1890 \xRightarrow{\text{VI}} v_C = 5 \cdot 1{,}4 = 7$$

Bis zur ersten Überrundung läuft Cornelia 1890 Meter mit der mittleren Geschwindigkeit $7\,\text{m/s}$.
Bis zur ersten Überrundung läuft Lukas 1350 Meter mit der mittleren Geschwindigkeit $5\,\text{m/s}$.
Cornelia läuft bis zur Überrundung $\frac{1890}{540} = 3{,}5$ Runden.
Die erste Überrundung findet also genau in der Mitte der oberen Strecke statt.