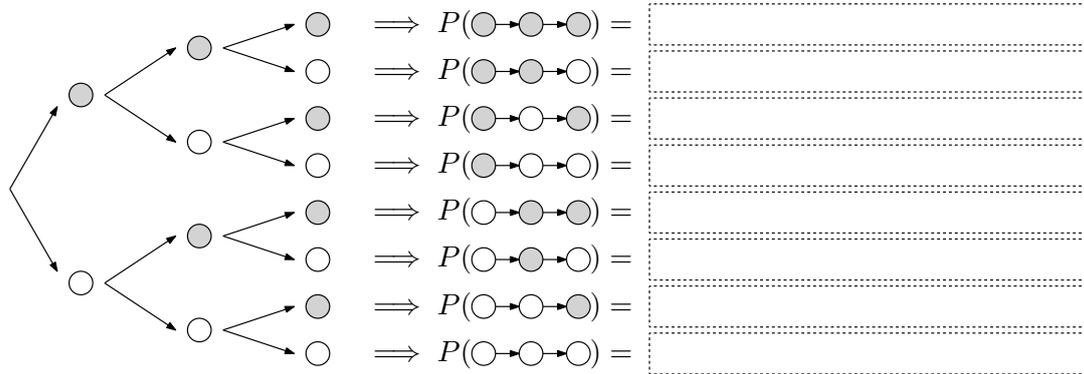




In einer Urne sind 6 graue und 4 weiße Kugeln. Du ziehst 3 Kugeln **mit Zurücklegen**.

- a) Beschrifte die Kanten des Baumdiagramms mit den Wahrscheinlichkeiten.
 Berechne die Wahrscheinlichkeit für jeden möglichen Ablauf.

Multiplikationsregel



- b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen 3 Kugeln genau 2 grau sind.

Additionsregel



Du wirfst einen fairen 6-seitigen Würfel insgesamt 10 Mal.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dabei ...



... nur Sechser zu würfeln?

= 1 zu

... zuerst einen Sechser und danach 9 Mal keinen Sechser zu würfeln?

... beim letzten Wurf den ersten Sechser zu würfeln?

... genau einen Sechser zu würfeln?

Hinweis: Jeder Pfad mit Länge 10 und genau einem Sechser hat die gleiche Wahrscheinlichkeit.

... nur beim 3. Wurf und beim 8. Wurf einen Sechser zu würfeln?

... genau zwei Sechser zu würfeln?

Hinweis: Jeder Pfad mit Länge 10 und genau 2 Sechsern hat die gleiche Wahrscheinlichkeit. Wie viele solcher Pfade gibt es?

Mehr zu solchen Abzählproblemen findest du am [Arbeitsblatt – Kombinatorik](#) und am [Arbeitsblatt – Binomialkoeffizienten](#).

Du wirfst einen fairen 6-seitigen Würfel insgesamt 10 Mal.
 Bei jedem Wurf unterscheidest du nur zwischen  und .

Das Ergebnis des Zufallsexperiments ist eine Folge mit Länge 10.
 Zum Beispiel: (, , , , , , , , , )



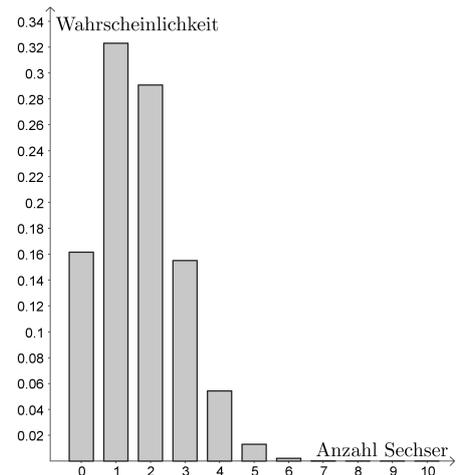
- 1) Stelle mithilfe von k eine Formel für die Wahrscheinlichkeit der Folge (, ..., , , ..., ) auf.

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{k \text{ Mal}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{10 - k \text{ Mal}}$$
- 2) Stelle mithilfe von k eine Formel für die Anzahl der Folgen mit Länge 10 und genau k Sechsern auf.
- 3) Die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau k Sechser unter den 10 Würfeln befinden, ist p_k .
 Stelle mithilfe von k eine Formel für die Wahrscheinlichkeit p_k auf.

$p_k =$

Berechne p_3 und p_4 , und trage die Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle unten links ein.
 Die Wahrscheinlichkeiten p_k sind im Säulendiagramm unten rechts dargestellt.

Anzahl Sechser k	Wahrscheinlichkeit p_k
0	16,14...%
1	32,30...%
2	29,07...%
3	
4	
5	1,30...%
6	0,21...%
7	0,024...%
8	$1,86... \cdot 10^{-3}$ %
9	$8,27... \cdot 10^{-5}$ %
10	$1,65... \cdot 10^{-6}$ %



- 4) Die **Zufallsvariable** X ordnet jeder Folge mit Länge 10 die Anzahl der Sechser zu.
 Statt $p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10}$ können wir dann kurz $P(X \geq 6)$ schreiben.
 Berechne mithilfe obiger Tabelle die folgenden Wahrscheinlichkeiten. Runde ganzzahlig.

$P(X \leq 1) \approx$ % $P(X < 3) \approx$ % $P(X \geq 3) \approx$ %

Du wirfst einen fairen 6-seitigen Würfel insgesamt n Mal.
 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Sechser bei diesen n Würfeln an.
 Stelle mithilfe von n und k eine Formel für die Wahrscheinlichkeit auf,
 dass sich genau k Sechser unter diesen n Würfeln befinden.



$P(X = k) =$

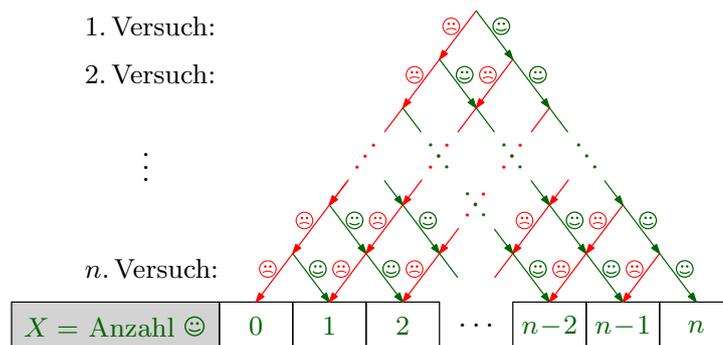
Wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind, dann ist die Zufallsvariable X **binomialverteilt mit den Parametern n und p** :

- 1) Wir führen ein Zufallsexperiment mit 2 möglichen Ergebnissen $\{\odot, \ominus\}$ insgesamt n Mal durch.
- 2) Bei jedem der n Versuche gilt für die Wahrscheinlichkeiten

$$P(\{\odot\}) = p \quad \text{bzw.} \quad P(\{\ominus\}) = 1 - p$$

unabhängig von den Ergebnissen der bisherigen Versuche.

- 3) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Erfolge (\odot) unter den n Versuchen an:



Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den n Versuchen genau k Erfolge (\odot) befinden:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \underbrace{p^k \cdot (1 - p)^{n-k}}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit von jedem Pfad mit genau } k \text{ Erfolgen } (\odot) \quad (\text{Multiplikationsregel}) \\ \text{Anzahl Pfade mit genau } k \text{ Erfolgen } (\odot) \quad (\text{Kombinatorik und Additionsregel})}}$$

Jedes Mal, wenn die oben eingeworfene Kugel auf einen Nagel \bullet trifft, fällt sie nach dem Zufallsprinzip entweder nach links oder nach rechts. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Kugel insgesamt nach rechts fällt. Ein möglicher Weg mit $X = 2$ ist rechts eingezeichnet.

Die Zufallsvariable X ist also binomialverteilt mit den Parametern $n = \square$ und $p = \square$.

Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten in %.

$P(X = 0) =$

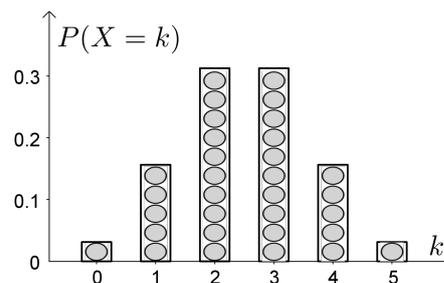
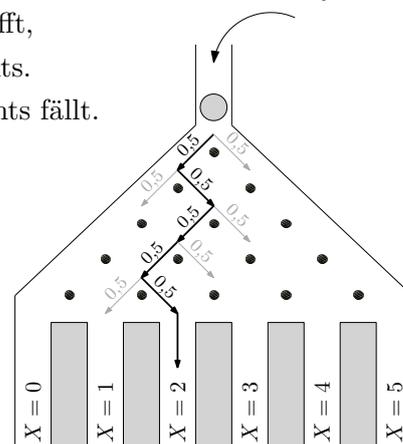
$P(X = 1) =$

$P(X = 2) =$

$P(X = 3) =$

$P(X = 4) =$

$P(X = 5) =$



Wenn $p = 0,5$ gilt, dann ist das Säulendiagramm mit den Wahrscheinlichkeiten symmetrisch zur Mitte.



Ist die angegebene Zufallsvariable X binomialverteilt?

Falls ja, gib die Parameter n und p an. Falls nein, begründe warum X *nicht* binomialverteilt ist.

- a) Eine Urne enthält 4 rote und 3 blaue Kugeln. Du ziehst 5 Kugeln mit Zurücklegen.
 X ... Anzahl blauer Kugeln unter den 5 Ziehungen
- b) Du wirfst gleichzeitig 8 faire 6-seitige Würfel mit den Augenzahlen von $\square \cdot$ bis $\square \cdot \cdot$.
 X ... Anzahl Würfel mit Ergebnis $\square \cdot$ oder $\square \cdot \cdot$
- c) Eine Urne enthält 7 rote und 5 blaue Kugeln.
 Du ziehst nach dem Zufallsprinzip gleichzeitig 3 Kugeln aus der Urne.
 X ... Anzahl blauer Kugeln unter den 3 Kugeln
- d) Ein Single-Choice-Test enthält 30 Fragen mit jeweils 5 möglichen Antworten. Bei jeder Frage ist genau eine Antwort richtig. Du kreuzt bei jeder Frage eine Antwort nach dem Zufallsprinzip an.
 X ... Anzahl richtig beantworteter Fragen
- e) Du wirfst einen fairen 6-seitigen Würfel mit den Augenzahlen von $\square \cdot$ bis $\square \cdot \cdot$ so lange, bis zum ersten Mal ein Sechser kommt.
 X ... Anzahl Würfe bis zum ersten Sechser
- f) Eine gezinkte Münze mit den 2 Seiten „Kopf“ und „Zahl“ zeigt mit 70%-iger Wahrscheinlichkeit das Ergebnis „Kopf“. Du wirfst die Münze insgesamt 18 Mal.
 X ... Anzahl Würfe mit Ergebnis „Zahl“
- g) Beim Roulette gibt es 37 Felder, die mit den Zahlen von 0 bis 36 durchnummeriert sind. Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün. Bei jeder Drehung wird mit einer Kugel ein Feld nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Du beobachtest insgesamt 30 Drehungen.
 X ... Anzahl Drehungen, bei denen ein rotes Feld ausgewählt wird
- h) ★ Eine Urne enthält 45 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 45 durchnummeriert sind. Bei einer Lotto-Ziehung werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Lukas beobachtet über ein Jahr hinweg alle 104 Lotto-Ziehungen.
 X ... Anzahl Lotto-Ziehungen, bei denen die Kugel mit der Zahl 42 gezogen wird
- i) ★ Du wirfst nacheinander 4 faire 6-seitige Würfel mit den Augenzahlen von $\square \cdot$ bis $\square \cdot \cdot$.
 X ... Anzahl *verschiedener* Augenzahlen unter den 4 Würfeln

Das Kartenspiel *Single-Deck Blackjack* wird mit 52 Karten gespielt.

Davon haben genau 4 Karten den Wert 11. Genau 16 Karten haben den Wert 10.

Jede Runde erhält jede Person nach dem Zufallsprinzip 2 Karten. Hat eine Karte den Wert 11 und die andere Karte den Wert 10 (in beliebiger Reihenfolge), spricht man von einem *Blackjack*.

- 1) Berechne die Wahrscheinlichkeit p , dass du bei einer einzelnen Runde einen Blackjack hast.

$p =$

- 2) Du spielst 1000 Runden Single-Deck Blackjack. Nach jeder Runde werden die Karten neu gemischt. X gibt die Anzahl der Runden an, bei denen du einen Blackjack hast. Berechne mit Technologieinsatz die Wahrscheinlichkeit, dass du dabei ...

... höchstens 42 Mal einen Blackjack hast.

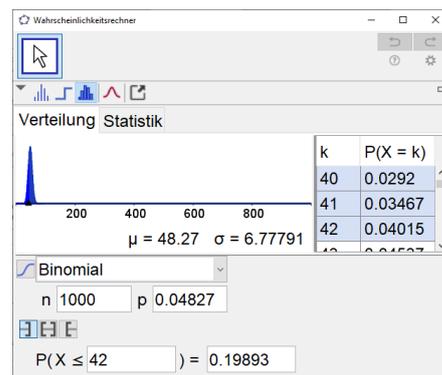
... weniger als 35 Mal einen Blackjack hast.

... mindestens 50 Mal einen Blackjack hast.

... mehr als 50 Mal einen Blackjack hast.

... mindestens 38 Mal, aber weniger als 50 Mal einen Blackjack hast.

... genau 42 Mal einen Blackjack hast.



- 3) Beschreibe jeweils ein mögliches Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit berechnet wird:

$$P(A) = \binom{80}{2} \cdot p^2 \cdot (1 - p)^{78}$$

Ereignis A:

$$P(B) = (1 - p)^{130}$$

Ereignis B:

$$P(C) = \sum_{i=3}^8 \binom{250}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{250-i} \qquad \sum_{i=3}^8 f(i) = f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8)$$

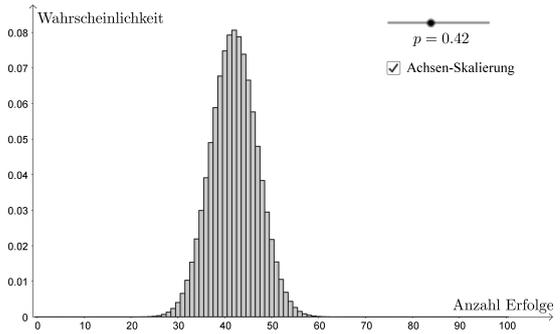
Ereignis C:

$$P(D) = 1 - (1 - p)^{70}$$

Ereignis D:

X ist eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $n = 100$ und p .

- a) Wie sieht das Säulendiagramm aus, wenn $p = 0$ gilt?
- b) Wie sieht das Säulendiagramm aus, wenn $p = 1$ gilt?
- c) Wie viele Erfolge erwartest du, wenn $p = 0,42$ gilt?



42 Erfolge sind auch das wahrscheinlichste Ergebnis bei $p = 0,42$. Die WS für *genau* 42 Erfolge beträgt aber trotzdem nur rund 8%.

Kenngrößen der Binomialverteilung 

X ist eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern n und p .

- 1) Dann gilt für den **Erwartungswert** von X :

$$\mu = E(X) = n \cdot p$$

Dieses intuitive Ergebnis lässt sich direkt aus der Definition vom Erwartungswert diskreter Zufallsvariablen **beweisen**.

- 2) Dann gilt für die **Varianz** von X :

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Für welches p ist $V(X)$ am größten?

- 3) Dann gilt für die **Standardabweichung** von X :

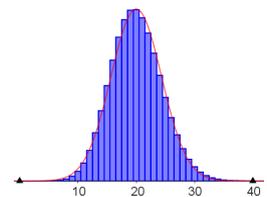
$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Für welches p ist σ am größten?

Binomialverteilung \rightsquigarrow Normalverteilung 

Du würfelst 360 Mal mit zwei fairen 6-seitigen Würfeln mit den Augenzahlen von \square bis $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}$. Die Zufallsvariable X gibt an, bei wie vielen Würfeln das Ergebnis entweder $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} / \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}$ oder $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} / \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$ ist.

- 1) Berechne den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X .



- 2) Trage ganze Zahlen richtig in die Kästchen ein, und berechne die Wahrscheinlichkeiten.

$$P(\mu - 1 \cdot \sigma < X < \mu + 1 \cdot \sigma) = P(\boxed{} \leq X \leq \boxed{}) = \boxed{}$$

$$P(\mu - 2 \cdot \sigma < X < \mu + 2 \cdot \sigma) = P(\boxed{} \leq X \leq \boxed{}) = \boxed{}$$

$$P(\mu - 3 \cdot \sigma < X < \mu + 3 \cdot \sigma) = P(\boxed{} \leq X \leq \boxed{}) = \boxed{}$$

„Sigma-Umgebungen“

Wenn bei der Binomialverteilung der Parameter n zu große Werte annimmt, scheitert auch GeoGebra (berechtigterweise) bei der exakten Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. In diesem Fall können die Wahrscheinlichkeiten aber sehr gut mithilfe einer sogenannten Normalverteilung angenähert werden. Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Normalverteilung](#).