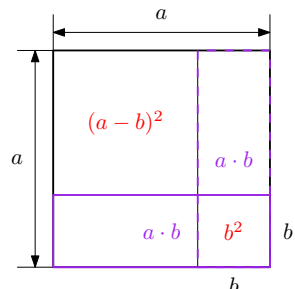
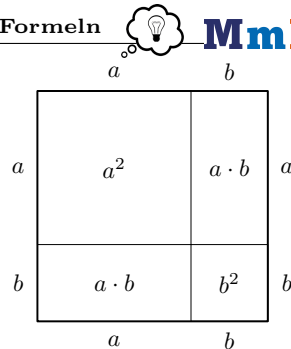


Rechts ist die **Binomische Formel**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

veranschaulicht. Rechne die Formel nach, indem du ausmultiplizierst:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



Rechne auch die **Binomische Formel**

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

nach, und erkläre den Zusammenhang mit dem Bild links.

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - a \cdot b - b \cdot a + b^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Rechne auch die **Binomische Formel** $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ nach, indem du ausmultiplizierst:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - a \cdot b + b \cdot a - b^2 = a^2 - b^2$$

Multipliziere aus, und vereinfache so weit wie möglich.

a) $3 \cdot (x + y)^2 - 4 \cdot (x - y)^2 = 3 \cdot (x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2) - 4 \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2) =$
 $= 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2 - 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x \cdot y - 4 \cdot y^2 = -x^2 + 14 \cdot x \cdot y - y^2$

b) $(x + 2 \cdot y)^2 + 3 \cdot (x + y) \cdot (x - y) = x^2 + 4 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2 + 3 \cdot (x^2 - y^2)$
 $= x^2 + 4 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2 + 3 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2 = 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y + y^2$

c) $(2 \cdot x)^2 - (2 + x)^2 = 4 \cdot x^2 - (4 + 4 \cdot x + x^2) = 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 4$

d) $2 \cdot x \cdot (x^2 + 3)^2 = 2 \cdot x \cdot (x^4 + 6 \cdot x^2 + 9) = 2 \cdot x^5 + 12 \cdot x^3 + 18 \cdot x$

Suche dir deine Lieblingszahl ($\neq 0$) aus und führe die folgenden Rechenschritte durch. Trage die Zwischenergebnisse in die Kästchen unten ein.

- i) Subtrahiere 2 von deiner Lieblingszahl.
- ii) Multipliziere das Ergebnis mit sich selbst.
- iii) Subtrahiere 4 vom Ergebnis.
- iv) Dividiere das Ergebnis durch deine Lieblingszahl.
- v) Addiere 46 zum Ergebnis.
- vi) Subtrahiere deine Lieblingszahl vom Ergebnis.



Meine Lieblingszahl bei solchen Rätseln ist x . Führe die gleichen Rechenschritte wie vorher mit x durch. Vereinfache nach jedem Schritt so weit wie möglich. Zeige, dass das Ergebnis hier immer 42 ist.

$$x \xrightarrow{i)} x - 2 \xrightarrow{ii)} (x - 2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 \xrightarrow{iii)} x^2 - 4 \cdot x \xrightarrow{iv)} \frac{x^2 - 4 \cdot x}{x} = x - 4 \xrightarrow{v)} x + 42 \xrightarrow{vi)} 42$$

Vereinfache den Bruchterm mit den Binomischen Formeln so weit wie möglich.

$$\text{a) } \frac{x^2 - 6 \cdot x + 9}{(x - 3) \cdot (x + 3)} = \frac{(x - 3)^2}{(x - 3) \cdot (x + 3)} = \frac{x - 3}{x + 3}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 2 \cdot x}{x^2 - 4} = \frac{x \cdot (x - 2)}{(x - 2) \cdot (x + 2)} = \frac{x}{x + 2}$$

$$\text{c) } \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6 \cdot h + h^2 - 9}{h} = \frac{h \cdot (6 + h)}{h} = 6 + h$$

In der Mathematik gibt es eine **Vielzahl ungelöster Probleme**, an denen täglich geforscht wird.

Wesentlich dabei ist das Erkennen von Zusammenhängen und Mustern, das Aufstellen von Vermutungen und das Beweisen dieser Vermutungen.

1) Kontrolliere, dass die Rechnungen rechts stimmen.

$$2^2 = 3 \cdot 1 + 1$$

$$5^2 = 6 \cdot 4 + 1$$

$$8^2 = 9 \cdot 7 + 1$$

2) Setze das Muster rechts in den folgenden 3 Zeilen fort.

$$11^2 = 12 \cdot 10 + 1$$

$$14^2 = 15 \cdot 13 + 1$$

$$17^2 = 18 \cdot 16 + 1$$

$$20^2 = 21 \cdot 19 + 1$$

$$23^2 = 24 \cdot 22 + 1$$

Der Term $3 \cdot n$ legt die **Zahlenfolge** (3; 6; 9; 12; 15; ...) für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ eindeutig fest:

• Die 1. Zahl der Folge ist $3 \cdot 1 = 3$.

• Die 2. Zahl der Folge ist $3 \cdot 2 = 6$.

• Die 3. Zahl der Folge ist $3 \cdot 3 = 9$.

⋮

3) Stelle mithilfe von n eine Vermutung für den Zusammenhang rechts oben auf.

$$(3 \cdot n - 1)^2 = (3 \cdot n) \cdot (3 \cdot n - 2) + 1$$

4) Beweise deine Vermutung. Zeige also, dass auf beiden Seiten für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ das gleiche Ergebnis herauskommt.

$$\text{Linke Seite: } (3 \cdot n - 1)^2 = 9 \cdot n^2 - 6 \cdot n + 1$$

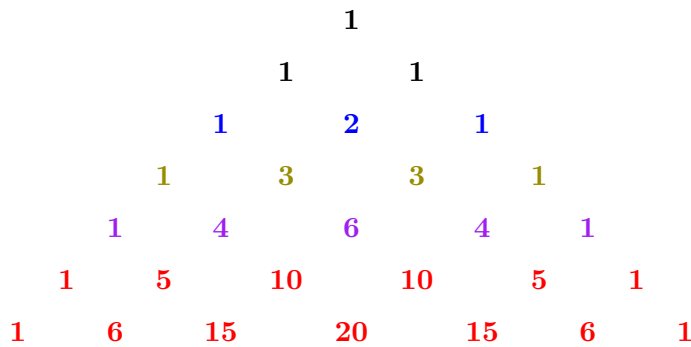
$$\text{Rechte Seite: } (3 \cdot n) \cdot (3 \cdot n - 2) + 1 = 9 \cdot n^2 - 6 \cdot n + 1 \checkmark$$

Multipliziere den Term $(a + b)^3$ aus, und vereinfache so weit wie möglich.

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b) \cdot (a + b)^2 = (a + b) \cdot (a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2) = \\ &= a^3 + 2 \cdot a^2 \cdot b + a \cdot b^2 + a^2 \cdot b + 2 \cdot a \cdot b^2 + b^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \end{aligned}$$

Den Term $(a + b)^6$ auf diese Weise auszumultiplizieren, wäre mühsam. Das Pascalsche Dreieck liefert eine Abkürzung.

Unten sind die ersten Zeilen des **Pascalschen Dreiecks** dargestellt. Erkennst du ein Muster? Welche Zahlen stehen vermutlich in den nächsten beiden Zeilen?



Wir haben zuvor ausmultipliziert:

$$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a^1 \cdot b^1 + 1 \cdot b^2$$

$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b^1 + 3 \cdot a^1 \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$$

Siehst du den Zusammenhang mit dem Pascalschen Dreieck oben? Setze das Muster fort:

$$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b^1 + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a^1 \cdot b^3 + 1 \cdot b^4$$

$$(a + b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b^1 + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a^1 \cdot b^4 + 1 \cdot b^5$$

$$(a + b)^6 = 1 \cdot a^6 + 6 \cdot a^5 \cdot b^1 + 15 \cdot a^4 \cdot b^2 + 20 \cdot a^3 \cdot b^3 + 15 \cdot a^2 \cdot b^4 + 6 \cdot a^1 \cdot b^5 + 1 \cdot b^6$$

Multipliziere aus, und vereinfache so weit wie möglich.

a)
$$2 \cdot (x + 2)^4 = 2 \cdot (1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot 2^1 + 6 \cdot x^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot x^1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4) = 2 \cdot x^4 + 16 \cdot x^3 + 48 \cdot x^2 + 64 \cdot x + 32$$

b)
$$4 \cdot (x - 2)^3 = 4 \cdot (x + (-2))^3 = 4 \cdot (1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-2)^1 + 3 \cdot x^1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^3) = 4 \cdot x^3 - 24 \cdot x^2 + 48 \cdot x - 32$$

Für $(a + b)^2$ und $(a + b)^3$ haben wir schon nachgerechnet, dass diese Methode funktioniert. Wenn die Rechnung für eine Zeile stimmt, dann stimmt sie auch für die nächste Zeile:

$$\begin{aligned} (a + b)^4 &= (a + b) \cdot (a + b)^3 = \\ &= (a + b) \cdot (1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b^1 + 3 \cdot a^1 \cdot b^2 + 1 \cdot b^3) = \\ &= 1 \cdot a^4 + 3 \cdot a^3 \cdot b^1 + 3 \cdot a^2 \cdot b^2 + 1 \cdot a^1 \cdot b^3 + \\ &\quad + 1 \cdot a^3 \cdot b^1 + 3 \cdot a^2 \cdot b^2 + 3 \cdot a^1 \cdot b^3 + 1 \cdot b^4 = \\ &= 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b^1 + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a^1 \cdot b^3 + 1 \cdot b^4 \end{aligned}$$

