



Der **Binomische Lehrsatz**

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

hilft beim Ausmultiplizieren von Binomen der Form $(x + y)^n$. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} (x + y)^4 &= \binom{4}{0} \cdot x^0 \cdot y^4 + \binom{4}{1} \cdot x^1 \cdot y^3 + \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot y^2 + \binom{4}{3} \cdot x^3 \cdot y^1 + \binom{4}{4} \cdot x^4 \cdot y^0 \\ &= 1 \cdot y^4 + 4 \cdot x \cdot y^3 + 6 \cdot x^2 \cdot y^2 + 4 \cdot x^3 \cdot y + 1 \cdot x^4 \end{aligned}$$

Eine kombinatorische Erklärung für den Binomischen Lehrsatz findest du auf dem [AB – Pascalsches Dreieck II](#).

Jetzt beweisen wir den Binomischen Lehrsatz mit **vollständiger Induktion** nach n :

Überprüfe den Binomischen Lehrsatz für $n = 0$:

Als Nächstes überprüfen wir den Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$.

Wir dürfen also verwenden, dass $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$ gilt.

Daraus müssen wir folgern, dass $(x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}$ gilt.

Wir ziehen zunächst die Summanden $k = 0$ und $k = n + 1$ aus der Summe, um $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ verwenden zu können.

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} = \\ &= y^{n+1} + x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} = \quad \text{Ausmultiplizieren, Summe aufteilen} \\ &= \underbrace{y^{n+1}}_{k=0} + \underbrace{x^{n+1}}_{k=n} + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} \right] + \left[\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} \right] = \quad \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \\ &= x \cdot \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \right] + y \cdot \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \right] = \\ &= x \cdot (x + y)^n + y \cdot (x + y)^n = (x + y) \cdot (x + y)^n = (x + y)^{n+1} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Zeilensumme im Pascalschen Dreieck



Berechne mit dem Binomischen Lehrsatz die n -te Zeilensumme im Pascalschen Dreieck:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} =$$

Alternierende Zeilensumme im Pascalschen Dreieck



Berechne mit dem Binomischen Lehrsatz für $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k =$$