

Bei **Gleichungen** und **Ungleichungen** unterscheiden wir zwischen der **Grundmenge**, der **Definitionsmenge** und der **Lösungsmenge**.

- Die **Grundmenge** G enthält alle Zahlen, die für die Variable x vorgesehen sind.
- Die **Definitionsmenge** D ist eine **Teilmenge** der Grundmenge. Sie enthält nur jene Zahlen der Grundmenge, für die alle Terme der Gleichung definiert sind. Zum Beispiel ist der Term $\frac{1}{x-2}$ *nicht* definiert, wenn wir für x die Zahl **2** einsetzen. Der Term $\sqrt{2 \cdot x - 6}$ ist *nicht* definiert, wenn x kleiner als **3** ist.
- Die **Lösungsmenge** L ist eine Teilmenge der Definitionsmenge. Sie enthält nur jene Zahlen der Definitionsmenge, die **Lösungen** der Gleichung sind.

Bruchgleichungen lösen



Bei einer **Bruchgleichung** tritt die gesuchte Variable im Nenner eines Bruchs auf.

Wir lösen die Bruchgleichung $\frac{4}{x+2} = -2$ über der Grundmenge \mathbb{R} .

i) Da die Variable x in einem Nenner vorkommt, ermitteln wir zuerst die Definitionsmenge:

Wenn $x + 2 = 0$, also $x = -2$ gilt, dann ist der Bruch $\frac{4}{x+2}$ *nicht* definiert. Division durch 0

Die Zahl -2 kann damit auch keine Lösung der Bruchgleichung sein.

Die Definitionsmenge D besteht somit aus **allen reellen Zahlen außer -2** , kurz: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

ii) Dann ermitteln wir die Lösungsmenge L , indem wir die Bruchgleichung nach x umformen.

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+2} &= -2 & | \cdot (x+2) \\ 4 &= -2 \cdot (x+2) \\ 4 &= -2 \cdot x - 4 & | +4 \\ 8 &= -2 \cdot x & | : (-2) \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Die Multiplikation mit $(x+2)$ ist für jede Zahl in der Definitionsmenge eine **Äquivalenzumformung**.

Die unterste Gleichung ist genau dann wahr, wenn wir für x die Zahl -4 einsetzen.

Da wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt haben, stimmen auch alle vorherigen Gleichungen genau dann, wenn wir für x die Zahl -4 einsetzen.

Für die Lösungsmenge L dieser Bruchgleichung gilt also: $L = \{-4\}$

Grundmenge / Definitionsmenge / Lösungsmenge



Die Definitionsmenge und die Lösungsmenge hängen von der angegebenen Grundmenge ab.

Trage jeweils die Definitionsmenge und die Lösungsmenge von $\frac{4}{x+2} = -2$ in die Tabelle ein.

Grundmenge G	Definitionsmenge D	Lösungsmenge L
\mathbb{R}	$\mathbb{R} \setminus \{-2\}$	$\{-4\}$
\mathbb{Q}	$\mathbb{Q} \setminus \{-2\}$	$\{-4\}$
\mathbb{Z}	$\mathbb{Z} \setminus \{-2\}$	$\{-4\}$
\mathbb{N}	\mathbb{N}	$\{\}$

Ermittle die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Bruchgleichung über der Grundmenge \mathbb{R} .

$$\frac{8}{3 \cdot x - 8} = \frac{2}{9 - 2 \cdot x}$$

i) Definitionsmenge D ermitteln:

$$3 \cdot x - 8 = 0 \iff 3 \cdot x = 8 \iff x = \frac{8}{3}$$

$$9 - 2 \cdot x = 0 \iff 9 = 2 \cdot x \iff x = \frac{9}{2} \implies D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{8}{3}; \frac{9}{2} \right\}$$

ii) Lösungsmenge L ermitteln:

$$\frac{8}{3 \cdot x - 8} = \frac{2}{9 - 2 \cdot x} \quad | \cdot (3 \cdot x - 8) \cdot (9 - 2 \cdot x)$$

$$8 \cdot (9 - 2 \cdot x) = 2 \cdot (3 \cdot x - 8)$$

$$72 - 16 \cdot x = 6 \cdot x - 16 \quad | + 16 \cdot x + 16$$

$$88 = 22 \cdot x \quad | : 22$$

$$x = 4 \implies L = \{4\}$$

Rechts unten siehst du eine grafische Veranschaulichung dieser Aufgabe.

Für die beiden Hyperbeln h_1 bzw. h_2 gilt:

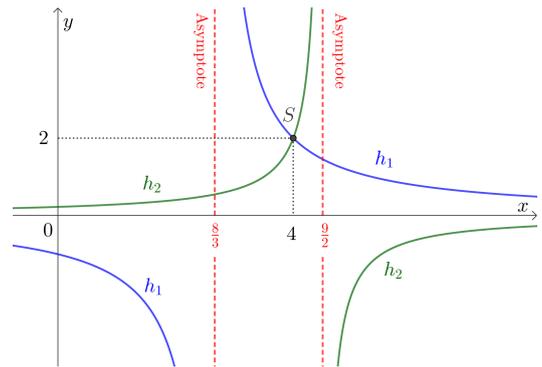
$$h_1: y = \frac{8}{3 \cdot x - 8} \quad \text{bzw.} \quad h_2: y = \frac{2}{9 - 2 \cdot x}$$

Die Hyperbel h_1 ist an jeder Stelle definiert außer $x = \frac{8}{3}$.

Die Hyperbel h_2 ist an jeder Stelle definiert außer $x = \frac{9}{2}$.

An der Stelle $x = 4$ stimmen die y -Koordinaten überein:

$$y = \frac{8}{3 \cdot 4 - 8} = 2 \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{2}{9 - 2 \cdot 4} = 2$$



Die Hyperbeln schneiden einander in genau diesem einen Punkt $S = (4 | 2)$.

Also ist die Zahl 4 die einzige Lösung dieser Bruchgleichung.

Wozu die Definitionsmenge ermitteln?



Lukas vergisst bei der Bruchgleichung $\frac{x}{x^2} = 1$ auf die Definitionsmenge. Er rechnet folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2} &= 1 & | \cdot x^2 \\ x &= x^2 & | - x^2 \\ x - x^2 &= 0 \\ x \cdot (1 - x) &= 0 \end{aligned}$$

Wenn wir die Definitionsmenge *nicht* ermitteln, dann ist *nicht* automatisch jede Lösung der untersten Gleichung auch eine Lösung der obersten Gleichung. Die Multiplikation mit x^2 ist nämlich *keine* Äquivalenzumformung für $x = 0$. In diesem Schritt ist also die Scheinlösung $x = 0$ dazu gekommen.

Die Gleichung $x \cdot (1 - x) = 0$ hat 2 Lösungen, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

Davon ist aber nur eine auch Lösung der ursprünglichen Gleichung, nämlich 1.

Über der Grundmenge \mathbb{R} gilt für die Definitionsmenge D dieser Gleichung: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Da die Zahl 0 nicht in der Definitionsmenge ist, kann sie keine Lösung der Gleichung sein.

Für die Lösungsmenge L dieser Gleichung gilt also: $L = \{1\}$

