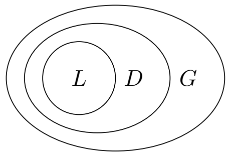
Grundmenge / Definitionsmenge / Lösungsmenge



Bei Gleichungen und Ungleichungen unterscheiden wir zwischen der **Grundmenge**, der **Definitionsmenge** und der **Lösungsmenge**.

- Die **Grundmenge G** enthält alle Zahlen, die für die Variable x vorgesehen sind.
- Die **Definitionsmenge D** ist eine Teilmenge der Grundmenge.
  Sie enthält nur jene Zahlen der Grundmenge, für die alle Terme der Gleichung definiert sind.
  Zum Beispiel ist der Term $\frac{1}{x-2}$ *nicht* definiert, wenn wir für x die Zahl 2 einsetzen.
  Der Term $\sqrt{2 \cdot x - 6}$ ist *nicht* definiert, wenn x kleiner als 3 ist.
- Die **Lösungsmenge L** ist eine Teilmenge der Definitionsmenge.
  Sie enthält nur jene Zahlen der Definitionsmenge, die Lösungen der Gleichung sind.

Bruchgleichungen lösen

Bei einer **Bruchgleichung** tritt die gesuchte Variable im Nenner eines Bruchs auf.

Wir lösen die Bruchgleichung $\dfrac{4}{x+2} = -2$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

i) Da die Variable x in einem Nenner vorkommt, ermitteln wir zuerst die Definitionsmenge:
Wenn $x + 2 = 0$, also $x = -2$ gilt, dann ist der Bruch $\frac{4}{x+2}$ *nicht* definiert. Division durch 0
Die Zahl -2 kann damit auch keine Lösung der Bruchgleichung sein.
Die Definitionsmenge D besteht somit aus allen reellen Zahlen außer -2, kurz: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

ii) Dann ermitteln wir die Lösungsmenge L, indem wir die Bruchgleichung nach x umformen.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x+2} &= -2 && | \cdot (x+2) \\
4 &= -2 \cdot (x+2) && \\
4 &= -2 \cdot x - 4 && | +4 \\
8 &= -2 \cdot x && | : (-2) \\
x &= -4 &&
\end{aligned}$$

Die Multiplikation mit $(x + 2)$ ist für jede Zahl in der Definitionsmenge eine Äquivalenzumformung.

Die unterste Gleichung ist genau dann wahr, wenn wir für x die Zahl -4 einsetzen.

Da wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt haben, stimmen auch alle vorherigen Gleichungen genau dann, wenn wir für x die Zahl -4 einsetzen.

Für die Lösungsmenge L dieser Bruchgleichung gilt also: $L = \{-4\}$

Grundmenge / Definitionsmenge / Lösungsmenge

Die Definitionsmenge und die Lösungsmenge hängen von der angegeben Grundmenge ab.

Trage jeweils die Definitionsmenge und die Lösungsmenge von $\dfrac{4}{x+2} = -2$ in die Tabelle ein.

Grundmenge G	Definitionsmenge D	Lösungsmenge L
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{-2\}$	$\{-4\}$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} \setminus \{-2\}$	$\{-4\}$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \setminus \{-2\}$	$\{-4\}$
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\{\}$

Bruchgleichungen lösen

Ermittle die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Bruchgleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$\frac{8}{3 \cdot x - 8} = \frac{2}{9 - 2 \cdot x}$$

i) Definitionsmenge D ermitteln:

$$3 \cdot x - 8 = 0 \iff 3 \cdot x = 8 \iff x = \frac{8}{3}$$

$$9 - 2 \cdot x = 0 \iff 9 = 2 \cdot x \iff x = \frac{9}{2} \qquad \implies D = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{8}{3}; \tfrac{9}{2}\}$$

ii) Lösungsmenge L ermitteln:

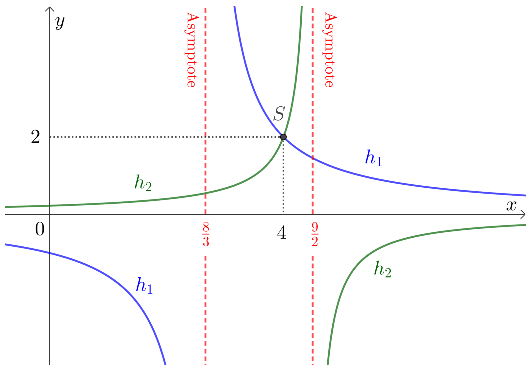
$$\begin{aligned} \frac{8}{3 \cdot x - 8} &= \frac{2}{9 - 2 \cdot x} && \mid \cdot (3 \cdot x - 8) \cdot (9 - 2 \cdot x) \\ 8 \cdot (9 - 2 \cdot x) &= 2 \cdot (3 \cdot x - 8) && \\ 72 - 16 \cdot x &= 6 \cdot x - 16 && \mid + 16 \cdot x + 16 \\ 88 &= 22 \cdot x && \mid : 22 \\ x &= 4 && \implies L = \{4\} \end{aligned}$$

Rechts unten siehst du eine grafische Veranschaulichung dieser Aufgabe.
Für die beiden Hyperbeln h_1 bzw. h_2 gilt:

$$h_1\colon\ y = \frac{8}{3 \cdot x - 8} \quad \text{bzw.} \quad h_2\colon\ y = \frac{2}{9 - 2 \cdot x}$$

Die Hyperbel h_1 ist an jeder Stelle definiert außer $x = \frac{8}{3}$.
Die Hyperbel h_2 ist an jeder Stelle definiert außer $x = \frac{9}{2}$.
An der Stelle $x = 4$ stimmen die y-Koordinaten überein:

$$y = \frac{8}{3 \cdot 4 - 8} = 2 \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{2}{9 - 2 \cdot 4} = 2$$



Die Hyperbeln schneiden einander in genau diesem einen Punkt $S = (4 \mid 2)$.
Also ist die Zahl 4 die einzige Lösung dieser Bruchgleichung.

Wozu die Definitionsmenge ermitteln?

Lukas vergisst bei der Bruchgleichung $\frac{x}{x^2} = 1$ auf die Definitionsmenge. Er rechnet folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2} &= 1 && \mid \cdot x^2 \\ x &= x^2 && \mid - x^2 \\ x - x^2 &= 0 && \\ x \cdot (1 - x) &= 0 && \end{aligned}$$

Wenn wir die Definitionsmenge *nicht* ermitteln, dann ist *nicht* automatisch jede Lösung der untersten Gleichung auch eine Lösung der obersten Gleichung.
Die Multiplikation mit x^2 ist nämlich *keine* Äquivalenzumformung für $x = 0$.
In diesem Schritt ist also die Scheinlösung $x = 0$ dazu gekommen.

Die Gleichung $x \cdot (1 - x) = 0$ hat 2 Lösungen, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.
Davon ist aber nur eine auch Lösung der ursprünglichen Gleichung, nämlich 1.

Über der Grundmenge $\mathbb{R}$ gilt für die Definitionsmenge D dieser Gleichung: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Da die Zahl 0 nicht in der Definitionsmenge ist, kann sie keine Lösung der Gleichung sein.
Für die Lösungsmenge L dieser Gleichung gilt also: $L = \{1\}$