

Bei **Gleichungen** und **Ungleichungen** unterscheiden wir zwischen der **Grundmenge**, der **Definitionsmenge** und der **Lösungsmenge**.

- Die **Grundmenge G** enthält alle Zahlen, die für die Variable  $x$  vorgesehen sind.
- Die **Definitionsmenge D** ist eine **Teilmenge** der Grundmenge. Sie enthält nur jene Zahlen der Grundmenge, für die alle Terme der Gleichung definiert sind. Zum Beispiel ist der Term  $\frac{1}{x-2}$  *nicht* definiert, wenn wir für  $x$  die Zahl  einsetzen. Der Term  $\sqrt{2 \cdot x - 6}$  ist *nicht* definiert, wenn  $x$  kleiner als  ist.
- Die **Lösungsmenge L** ist eine Teilmenge der Definitionsmenge. Sie enthält nur jene Zahlen der Definitionsmenge, die **Lösungen** der Gleichung sind.



Bei einer **Bruchgleichung** tritt die gesuchte Variable im Nenner eines Bruchs auf.

Wir lösen die Bruchgleichung  $\frac{4}{x+2} = -2$  über der Grundmenge  $\mathbb{R}$ .

- Da die Variable  $x$  in einem Nenner vorkommt, ermitteln wir zuerst die Definitionsmenge: Wenn  $x + 2 = 0$ , also  $x = -2$  gilt, dann ist der Bruch  $\frac{4}{x+2}$  *nicht* definiert. Division durch 0 Die Zahl  $-2$  kann damit auch keine Lösung der Bruchgleichung sein. Die Definitionsmenge  $D$  besteht somit aus **allen reellen Zahlen außer  $-2$** , kurz:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
- Dann ermitteln wir die Lösungsmenge  $L$ , indem wir die Bruchgleichung nach  $x$  umformen.

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+2} &= -2 & | \cdot (x+2) \\ 4 &= -2 \cdot (x+2) \\ 4 &= -2 \cdot x - 4 & | +4 \\ 8 &= -2 \cdot x & | : (-2) \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Die Multiplikation mit  $(x+2)$  ist für jede Zahl in der Definitionsmenge eine **Äquivalenzumformung**.

Die unterste Gleichung ist genau dann wahr, wenn wir für  $x$  die Zahl  $-4$  einsetzen.

Da wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt haben, stimmen auch alle vorherigen Gleichungen genau dann, wenn wir für  $x$  die Zahl  $-4$  einsetzen.

Für die Lösungsmenge  $L$  dieser Bruchgleichung gilt also:  $L = \{-4\}$



Die Definitionsmenge und die Lösungsmenge hängen von der angegebenen Grundmenge ab.

Trage jeweils die Definitionsmenge und die Lösungsmenge von  $\frac{4}{x+2} = -2$  in die Tabelle ein.

Grundmenge $G$	Definitionsmenge $D$	Lösungsmenge $L$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{-2\}$	$\{-4\}$
$\mathbb{Q}$		
$\mathbb{Z}$		
$\mathbb{N}$		

Ermittle die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Bruchgleichung über der Grundmenge  $\mathbb{R}$ .

$$\frac{8}{3 \cdot x - 8} = \frac{2}{9 - 2 \cdot x}$$

Rechts unten siehst du eine grafische Veranschaulichung dieser Aufgabe.

Für die beiden **Hyperbeln**  $h_1$  bzw.  $h_2$  gilt:

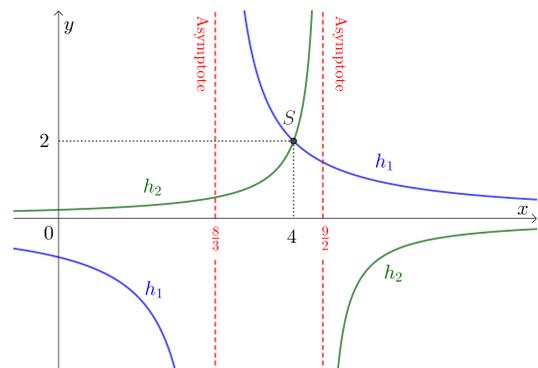
$$h_1: y = \frac{8}{3 \cdot x - 8} \quad \text{bzw.} \quad h_2: y = \frac{2}{9 - 2 \cdot x}$$

Die Hyperbel  $h_1$  ist an jeder Stelle definiert außer  $x = \frac{8}{3}$ .

Die Hyperbel  $h_2$  ist an jeder Stelle definiert außer  $x = \frac{9}{2}$ .

An der Stelle  $x = 4$  stimmen die  $y$ -Koordinaten überein:

$$y = \frac{8}{3 \cdot 4 - 8} = 2 \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{2}{9 - 2 \cdot 4} = 2$$



Die Hyperbeln schneiden einander in genau diesem einen Punkt  $S = (4 | 2)$ .

Also ist die Zahl 4 die einzige Lösung dieser Bruchgleichung.

Wozu die Definitionsmenge ermitteln?



Lukas vergisst bei der Bruchgleichung  $\frac{x}{x^2} = 1$  auf die Definitionsmenge. Er rechnet folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2} &= 1 & | \cdot x^2 \\ x &= x^2 & | - x^2 \\ x - x^2 &= 0 \\ x \cdot (1 - x) &= 0 \end{aligned}$$

Wenn wir die Definitionsmenge *nicht* ermitteln, dann ist *nicht* automatisch jede Lösung der untersten Gleichung auch eine Lösung der obersten Gleichung. Die Multiplikation mit  $x^2$  ist nämlich *keine* Äquivalenzumformung für  $x = 0$ . In diesem Schritt ist also die Scheinlösung  $x = 0$  dazu gekommen.

Die Gleichung  $x \cdot (1 - x) = 0$  hat 2 Lösungen, nämlich  $x_1 = \square$  und  $x_2 = \square$ .

Davon ist aber nur eine auch Lösung der ursprünglichen Gleichung, nämlich  $\square$ .

Über der Grundmenge  $\mathbb{R}$  gilt für die Definitionsmenge  $D$  dieser Gleichung:  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Da die Zahl 0 nicht in der Definitionsmenge ist, kann sie keine Lösung der Gleichung sein.

Für die Lösungsmenge  $L$  dieser Gleichung gilt also:  $L = \{1\}$

