



Alle Zahlen, die man als **Bruch** $\frac{a}{b}$ mit **ganzen Zahlen** a und $b \neq 0$ schreiben kann, heißen **rationale Zahlen** bzw. **Bruchzahlen**.

Jede Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen ist rational. Zum Beispiel: $0,42 = \frac{42}{100}$

Jede periodische Dezimalzahl ist rational. Zum Beispiel: $0,\dot{3} = 0,333\dots = \frac{1}{3}$ bzw. $0,\overline{42} = 0,4242\dots = \frac{42}{99}$

Die Menge der rationalen Zahlen wird mit \mathbb{Q} abgekürzt: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

Dabei verwenden wir die folgenden Bezeichnungen: $\frac{a}{b}$ ← **Zähler**
 ← **Bruchstrich**
 ← **Nenner**

Bruchstrich – Divisionszeichen



Der Bruchstrich steht so wie die Symbole \div , $:$ und $/$ für eine Division.

Es gilt also: $\frac{7}{2} = 7 \div 2 = 7 : 2 = 7/2 = 3,5$

Berechne: a) $2 + 8 : 4 - 6 = \square$ b) $(2 + 8) : (4 - 6) = \square$ c) $\frac{2 + 8}{4 - 6} = \square$

Versteckte Klammern



Bei jedem Bruch sind Zähler und Nenner jeweils in Klammern gesetzt. Wir müssen diese Klammern nicht anschreiben, aber dürfen nicht darauf vergessen.

Zum Beispiel: $2 \cdot \frac{x + 3}{5} = 4$ Falsche **Umformung**: $2 \cdot x + 3 = 20$
 Richtige Umformung: $2 \cdot (x + 3) = 20$

Brüche als relative Anteile

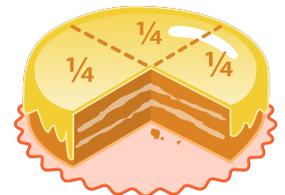


Liegt eine Bruchzahl zwischen 0 und 1, dann können wir sie als **relativen Anteil** interpretieren.

Zum Beispiel: $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75 = 75\%$

Die ganze Torte rechts wurde in 4 gleich große Stücke geteilt.

Es sind noch 3 Stücke übrig. Das sind $\frac{3}{4}$ bzw. 75% der ganzen Torte.



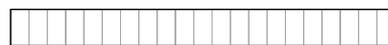
Verschiedene Brüche – Gleiche Bruchzahl



Hinter *verschiedenen* Brüchen kann die *gleiche* Bruchzahl stecken.

Markiere $\frac{2}{7}$ der Rechtecksfläche:

Markiere $\frac{6}{21}$ der Rechtecksfläche:



In beiden Bildern hast du den *gleichen* relativen Anteil der Rechtecksfläche markiert, nämlich:

$$2 : 7 = 6 : 21 = 0,2857\dots = 28,57\dots\%$$

Trage jeweils eine Zahl richtig in das Kästchen ein:

a) $\frac{2}{3} = \frac{\square}{12}$ b) $\frac{4}{5} = \frac{20}{\square}$ c) $\frac{3}{5} = \frac{18}{\square}$ d) $\frac{2}{3} = \frac{\square}{21}$

e) $\frac{4}{18} = \frac{\square}{9}$ f) $\frac{15}{25} = \frac{3}{\square}$ g) $\frac{12}{28} = \frac{3}{\square}$ h) $\frac{35}{42} = \frac{\square}{6}$

Erweitern und Kürzen von Brüchen



Wenn wir einen **Bruch erweitern**, dann multiplizieren wir Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl ($\neq 0$).

$$\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{6}{10}$$

Wenn wir einen **Bruch kürzen**, dann dividieren wir Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl ($\neq 0$).



Die Bruchzahl verändert sich beim Erweitern und beim Kürzen *nicht*: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$

Wenn Zähler und Nenner jeweils ein Produkt sind, können wir also gleiche Faktoren kürzen:

$$\frac{\cancel{\Delta} \cdot \square \cdot \cancel{\ominus} \cdot \diamond}{\cancel{\ominus} \cdot \nabla \cdot \cancel{\Delta} \cdot \Delta} = \frac{\square \cdot \diamond}{\nabla \cdot \Delta}$$

Wir *dividieren* links den Zähler und den Nenner jeweils durch Δ und durch \ominus .

Brüche vollständig kürzen



Unten findest du zwei Methoden, um den Bruch $\frac{252}{1890}$ vollständig zu kürzen.

- i) Berechne zuerst die **Primfaktorzerlegung** von 252 und von 1890. Schreibe dann den Zähler und den Nenner als Produkt von Primzahlen und kürze vollständig.

$$\frac{252}{1890} = \frac{\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square}{\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$$

- ii) Kürze in jedem Schritt durch einen gemeinsamen **Teiler**.

$$\frac{252}{1890} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

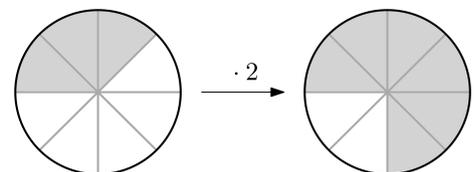
Bruch \cdot Zahl



Im Bild rechts wird der relative Anteil $\frac{3}{8}$ verdoppelt. Der neue relative Anteil ist $\frac{6}{8}$.

Als Rechnung: $\frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{8} = \frac{6}{8}$

Allgemein gilt: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$



Bruch \cdot Zahl



Berechne das Ergebnis.

a) $\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{\square}{\square}$ b) $\frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{\square}{\square}$ c) $\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{\square}{\square}$ d) $\frac{6}{5} \cdot 7 = \frac{\square}{\square}$

Für $\frac{42}{5} = 8 + \frac{2}{5}$ gibt es auch die Schreibweise $8 \frac{2}{5}$.

Wegen der Verwechslungsgefahr mit $8 \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{5}$ (bzw. $a \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{ab}{c}$) verzichten wir auf diese Schreibweise.

Bruch : Zahl 

Um den Bruch $\frac{2}{5}$ durch 3 zu dividieren, multiplizieren wir den Nenner mit 3.

Als Rechnung: $\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$



Gerhard freut sich schon auf $\frac{2}{5}$ eines Apfelstrudels. Er möchte aber nicht alles auf einmal essen, sondern dieses Stück in 3 gleiche Teile teilen. Dazu kann er die $\frac{1}{5}$ -Teile dritteln, also $\frac{1}{15}$ -Teile des gesamten Apfelstrudels bilden und zwei dieser Teile verspeisen.

Allgemein gilt: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$

Bruch : Zahl 

Berechne das Ergebnis.

a) $\frac{1}{4} : 3 = \frac{\square}{\square}$ b) $\frac{3}{7} : 2 = \frac{\square}{\square}$ c) $\frac{2}{3} : 5 = \frac{\square}{\square}$ d) $\frac{6}{5} : 7 = \frac{\square}{\square}$

Bruch · Bruch 

Rechts unten ist ein Quadrat mit Seitenlänge 1 m dargestellt.

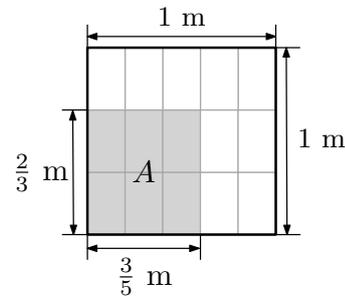
Wir berechnen den Flächeninhalt A der grau markierten Fläche auf zwei verschiedene Arten:

1) $A = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \text{ m}^2$

2) $A = 6 \cdot \frac{1}{15} \text{ m}^2 = \frac{6}{15} \text{ m}^2 = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} \text{ m}^2$

Allgemein gilt: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

„Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“



Bruch · Bruch 

Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a) $\frac{3}{2} \cdot \frac{14}{6} = \square$ b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2} = \square$

x : Bruch 

Statt durch den Bruch $\frac{a}{b}$ zu dividieren, können wir auch mit seinem **Kehrwert** $\frac{b}{a}$ multiplizieren.

Zum Beispiel: $5 : \frac{3}{2} = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

Begründung: $12 : 4 = 3$, weil $3 \cdot 4 = 12 \checkmark$

Allgemein gilt: $x : \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{a}$

$x : \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{a}$, weil $\left(x \cdot \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b \cdot a}{a \cdot b} = x \cdot 1 = x \checkmark$

Beachte auch, dass $\frac{3}{2} : 5 = \frac{3}{10}$ der Kehrwert von $5 : \frac{3}{2} = \frac{10}{3}$ ist.

x : Bruch 

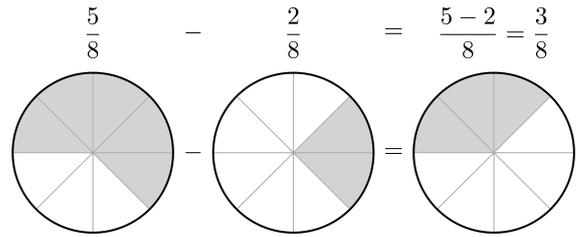
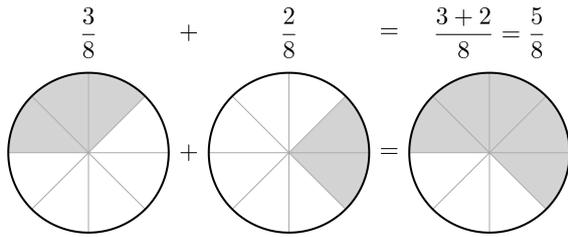
Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a) $35 : \frac{20}{3} = \square$ b) $\frac{14}{15} : \frac{28}{3} = \square$

Bruch ± Bruch



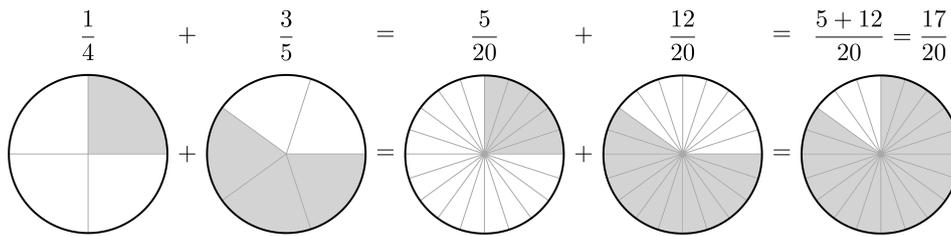
Wenn zwei Brüche den *gleichen Nenner* haben, dann können wir sie sofort addieren bzw. subtrahieren:



Allgemein gilt: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

Allgemein gilt: $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Wenn sie *verschiedene Nenner* haben, dann erweitern wir sie zuerst auf einen gemeinsamen Nenner:



Bruch ± Bruch



Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a) $\frac{5}{6} + \frac{4}{9} =$

b) $3 - \frac{2}{7} =$

Kleinsten gemeinsamen Nenner



Bei der Addition $\frac{1}{30} + \frac{1}{42}$ könnten wir die Brüche auf den gemeinsamen Nenner $30 \cdot 42 = 1260$ erweitern.

Der *kleinste gemeinsame Nenner* ist $\text{kgV}(30; 42) = \text{kgV}(2 \cdot 3 \cdot 5; 2 \cdot 3 \cdot 7) = \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = \square$.

Erweitere auf den kleinsten gemeinsamen Nenner, damit Zähler und Nenner möglichst klein bleiben:

$\frac{1}{30} + \frac{1}{42} =$

Doppelbrüche



Zur Auflösung von Doppelbrüchen können wir den Hauptbruchstrich durch eine Division ersetzen:

i) $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$ ii) $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$ iii) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

„Außen mal außen durch innen mal innen“

Doppelbrüche



Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a) $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}} =$

b) $\frac{7}{\frac{2}{3}} =$

c) $\frac{5}{\frac{2}{3}} =$

