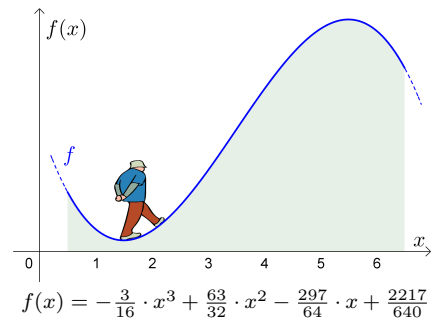


Steigungen berechnen



Der dargestellte Funktionsgraph modelliert das Profil eines Hügels:

- Wo ist der tiefste Punkt?
- Wo ist der höchste Punkt?
- Wie misst man die Steigung in einem Punkt?
- Wo geht es am steilsten bergauf?



Die Differentialrechnung gibt *exakte* Antworten auf diese Fragen.

Tangente & Linearisierung



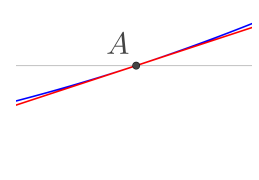
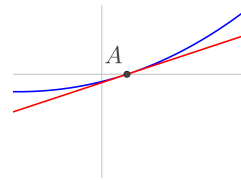
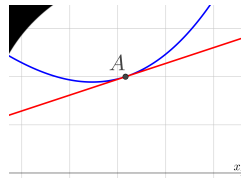
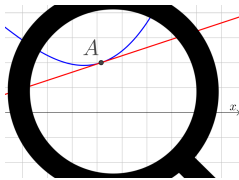
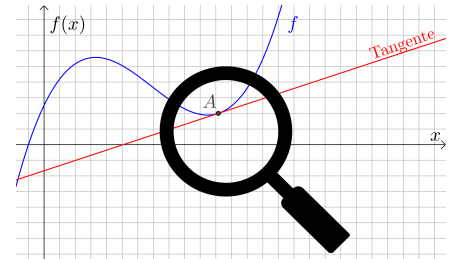
Bisher haben wir nur die **Steigung von Geraden** berechnet.

Rechts ist ein Punkt  $A$  am Graphen von  $f$  eingezeichnet.

Was soll nun die Steigung von  $f$  im Punkt  $A$  sein?

Wir nehmen den Graphen von  $f$  genauer unter die Lupe.

In der Bildreihe unten zoomen wir immer näher an  $A$  heran.



Wenn im Punkt  $A$  alles *glatt* läuft, dann schmiegt sich der Funktionsgraph an eine Gerade an.

Diese Gerade heißt **Tangente** von  $f$  im Punkt  $A$ . Die gesuchte Steigung ist die Steigung dieser Gerade.

Die lineare Funktion, deren Graph diese Tangente ist, heißt **Linearisierung** von  $f$  in  $A$ .

In der Differentialrechnung geht es um die *Berechnung* der Steigung dieser Tangente.

Sekante durch 2 Punkte eines Funktionsgraphen



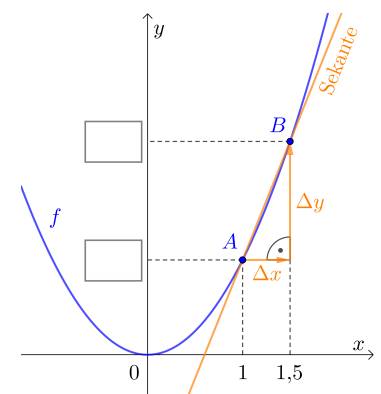
Rechts ist der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$  dargestellt.

- 1) Der Funktionsgraph verläuft durch die Punkte  $A$  und  $B$ .  
Trage die richtigen Koordinaten in die Kästchen ein.

$$A = \left( 1 \mid \boxed{\phantom{00}} \right) \quad B = \left( 1,5 \mid \boxed{\phantom{00}} \right)$$

Die eingezeichnete Gerade heißt **Sekante** von  $f$  durch  $A$  und  $B$ .

- 2) Berechne die Steigung  $k$  dieser Sekante.



- 3) Ermittle die Gleichung  $y = k \cdot x + d$  dieser Sekante.

Der **Differenzenquotient**  $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  misst die **mittlere Änderungsrate** von  $f$  in  $[1; 1,5]$ .

Die Steigung dieser Sekante ist ein *Näherungswert* für die Steigung der Tangente im Punkt  $A$ .

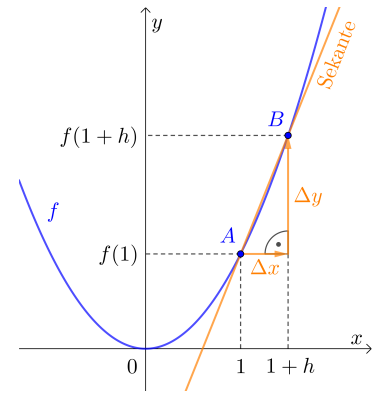
Rechts ist der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$  dargestellt.

Der Funktionsgraph verläuft durch die Punkte

$A = (1 | f(1))$  und  $B = (1 + h | f(1 + h))$  mit  $h \neq 0$ .

- 1) Die Steigung der Sekante durch  $A$  und  $B$  hängt von  $h$  ab.  
Vereinfache die Formel für die Steigung so weit wie möglich.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

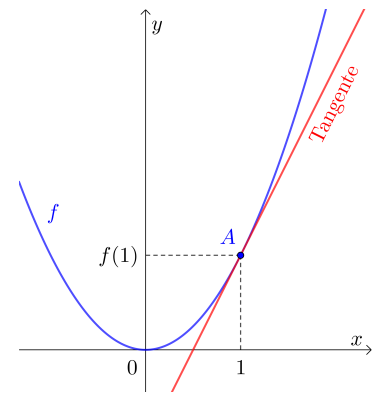


- 2) Für  $h \rightarrow 0$  geht die Sekantensteigung also auf den Wert  zu.  
„Ganz egal, wie sich der Punkt  $B$  entlang des Graphen auf den Punkt  $A$  hinbewegt, die Steigung der Sekanten strebt immer gegen dieselbe Zahl  $k$ .“

Wir schreiben dafür auch:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$$

Dieser **Grenzwert** ist die Steigung von  $f$  an der Stelle 1, also die Steigung der Tangente im Punkt  $A$ .



- 3) Ermittle die Gleichung  $y = k \cdot x + d$  der Tangente im Punkt  $A$ .

Der Funktionsgraph von  $f$  verläuft durch die beiden Punkte  $A = (x_0 | f(x_0))$  und  $B = (x_1 | f(x_1))$ .

Der Punkt  $A$  ist fest, der Punkt  $B$  ist auf dem Graphen beweglich.

$A$  ist wie ein Gelenk für die Sekanten.

Es gilt also  $x_1 = x_0 + h$  mit einer Zahl  $h \neq 0$ .

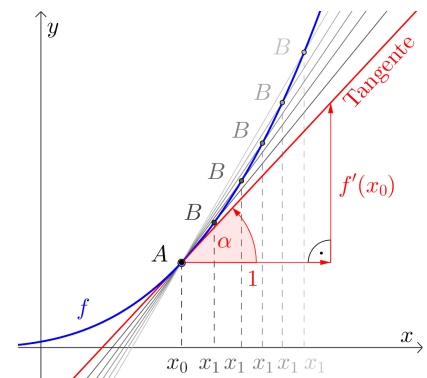
Für die **Steigung der Sekante** durch  $A$  und  $B$  gilt dann:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Für die **Steigung der Tangente** von  $f$  an der Stelle  $x_0$

schreiben wir kurz  $f'(x_0)$ : „f strich von  $x_0$ “

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$




Wenn dieser Grenzwert existiert, dann sagen wir: „ $f$  ist **differenzierbar** an der Stelle  $x_0$ .“

Dieser Grenzwert  $x_1 \rightarrow x_0$  bzw.  $h \rightarrow 0$  existiert *nicht* immer. Mehr dazu findest du am [Arbeitsblatt – Differenzierbarkeit](#).

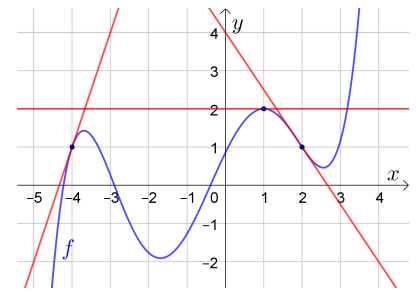
Der **Differentialquotient**  $f'(x_0)$  misst die **lokale Änderungsrate** von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .


Für den **Steigungswinkel**  $\alpha$  an der Stelle  $x_0$  gilt dann:  $\tan(\alpha) = f'(x_0)$

$f(x_0)$  und  $f'(x_0)$  ablesen 

Rechts sind ein Funktionsgraph und 3 Tangenten dargestellt.  
Lies die folgenden Funktionswerte und Steigungen ab.

$f(-4) = \boxed{\phantom{00}}$        $f(1) = \boxed{\phantom{00}}$        $f(2) = \boxed{\phantom{00}}$   
 $f'(-4) = \boxed{\phantom{00}}$        $f'(1) = \boxed{\phantom{00}}$        $f'(2) = \boxed{\phantom{00}}$



Ableitungsfunktion  **MmF**

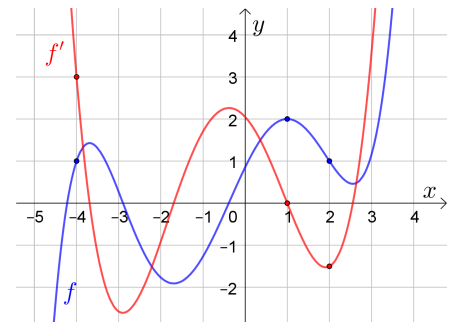
Polynomfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen sowie die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens sind an *jeder* Stelle in ihrem Definitionsbereich differenzierbar.


Ist eine Funktion  $f$  an *jeder* Stelle differenzierbar, können wir ihre **Ableitungsfunktion  $f'$**  ermitteln.

Rechts sind die Graphen einer Polynomfunktion  $f$  und ihrer Ableitungsfunktion  $f'$  dargestellt.

Der Funktionswert  $f'(x)$  ist gleich groß wie die Steigung von  $f$  an der Stelle  $x$ .

Das Vorzeichen von  $f'$  legt das **Monotonieverhalten** von  $f$  fest.



Ableitungsfunktion von  $f(x) = x^2$   **MmF**

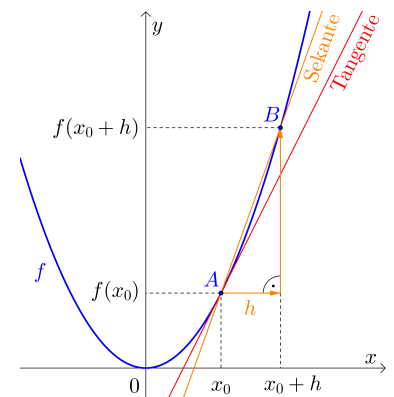
Rechts ist der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$  dargestellt.

Wir ermitteln eine Gleichung ihrer Ableitungsfunktion  $f'$ .

Der Funktionsgraph verläuft durch die Punkte  $A = (x_0 | f(x_0))$  und  $B = (x_0 + h | f(x_0 + h))$  mit  $h \neq 0$ .

- Die Steigung der Sekante durch  $A$  und  $B$  hängt von  $x_0$  und  $h$  ab. Vereinfache die Formel für die Steigung so weit wie möglich.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

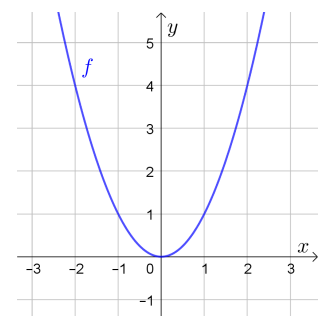



- Die Steigung der Tangente im Punkt  $A = (x_0 | f(x_0))$  hängt von  $x_0$  ab. Ermittle den Grenzwert  $h \rightarrow 0$ .

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

- Die quadratische Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$  hat also die Ableitungsfunktion  $f'$  mit  $f'(x) = \boxed{\phantom{00}}$ .

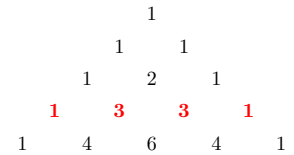
Zeichne den Funktionsgraphen von  $f'$  rechts ein.



Ableitungsfunktion von  $f(x) = x^3$  


Wir ermitteln die Ableitungsfunktion  $f'$  der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3$ .

- 1) Eine Sekante verläuft durch die Punkte  $A = (x_0 | f(x_0))$  und  $B = (x_0 + h | f(x_0 + h))$ .  
 Stelle mithilfe von  $x_0$  und  $h \neq 0$  eine Formel für die Steigung der Sekante auf.  
 Vereinfache so weit wie möglich. Zum Ausmultiplizieren von  $(a + b)^3$  kannst du das [Pascalsche Dreieck](#) verwenden.



- 2) Ermittle die Steigung der Tangente an der Stelle  $x_0$ .

- 3) Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3$  hat also die Ableitungsfunktion  $f'$  mit  $f'(x) =$   .

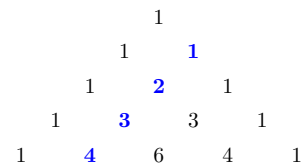
Ableitungsfunktion von  $f(x) = x^n$  


Beim Differenzieren von [Potenzfunktionen](#)  $f(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  gibt es ein Muster.

Dabei sind die rechts markierten Zahlen im Pascalschen Dreieck wesentlich.

Schaue dir die Berechnungen für  $f(x) = x^2$  und  $f(x) = x^3$  nochmal an.

Die Funktion  $f(x) = x^{42}$  hat also die Ableitungsfunktion  $f'(x) =$   .



Ableitungsfunktion von  $f(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4$  

Wir ermitteln die Ableitungsfunktion  $f'$  der Funktion  $f$  mit  $f(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4$ .

- 1) Eine Sekante verläuft durch die Punkte  $A = (x_0 | f(x_0))$  und  $B = (x_0 + h | f(x_0 + h))$ .  
 Stelle mithilfe von  $x_0$  und  $h \neq 0$  eine Formel für die Steigung der Sekante auf.  
 Vereinfache so weit wie möglich.

- 2) Ermittle die Steigung der Tangente an der Stelle  $x_0$ .

- 3) Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4$  hat also die Ableitungsfunktion  $f'(x) =$   .