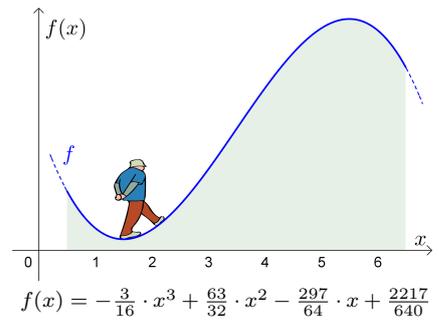


Steigungen berechnen



Der dargestellte Funktionsgraph modelliert das Profil eines Hügels:

- Wo ist der tiefste Punkt?
- Wo ist der höchste Punkt?
- Wie misst man die Steigung in einem Punkt?
- Wo geht es am steilsten bergauf?



Die Differentialrechnung gibt *exakte* Antworten auf diese Fragen.

Tangente & Linearisierung



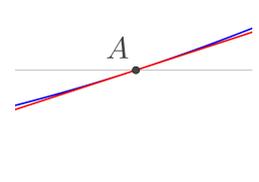
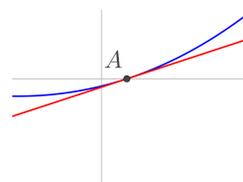
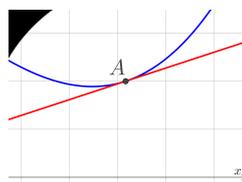
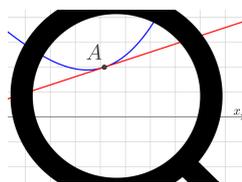
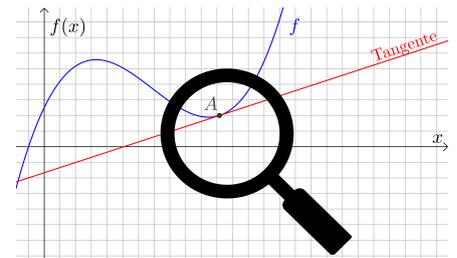
Bisher haben wir nur die **Steigung von Geraden** berechnet.

Rechts ist ein Punkt A am Graphen von f eingezeichnet.

Was soll nun die Steigung von f im Punkt A sein?

Wir nehmen den Graphen von f genauer unter die Lupe.

In der Bildreihe unten zoomen wir immer näher an A heran.



Wenn im Punkt A alles *glatt* läuft, dann schmiegt sich der Funktionsgraph an eine Gerade an.

Diese Gerade heißt **Tangente** von f im Punkt A . Die gesuchte Steigung ist die Steigung dieser Gerade.

Die lineare Funktion, deren Graph diese Tangente ist, heißt **Linearisierung** von f in A .

In der Differentialrechnung geht es um die *Berechnung* der Steigung dieser Tangente.

Sekante durch 2 Punkte eines Funktionsgraphen



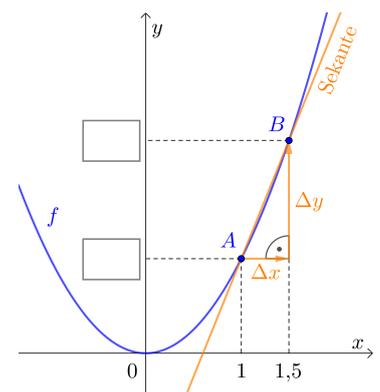
Rechts ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ dargestellt.

- Der Funktionsgraph verläuft durch die Punkte A und B .
Trage die richtigen Koordinaten in die Kästchen ein.

$$A = \left(1 \mid \boxed{} \right) \quad B = \left(1,5 \mid \boxed{} \right)$$

Die eingezeichnete Gerade heißt **Sekante** von f durch A und B .

- Berechne die Steigung k dieser Sekante.



- Ermittle die Gleichung $y = k \cdot x + d$ dieser Sekante.

Der **Differenzenquotient** $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ misst die **mittlere Änderungsrate** von f in $[1; 1,5]$.

Die Steigung dieser Sekante ist ein *Näherungswert* für die Steigung der Tangente im Punkt A .

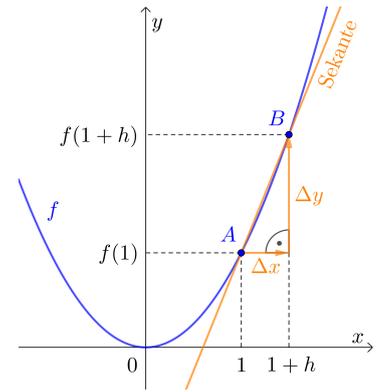
Rechts ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ dargestellt.

Der Funktionsgraph verläuft durch die Punkte

$A = (1 | f(1))$ und $B = (1 + h | f(1 + h))$ mit $h \neq 0$.

- 1) Die Steigung der Sekante durch A und B hängt von h ab.
Vereinfache die Formel für die Steigung so weit wie möglich.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$



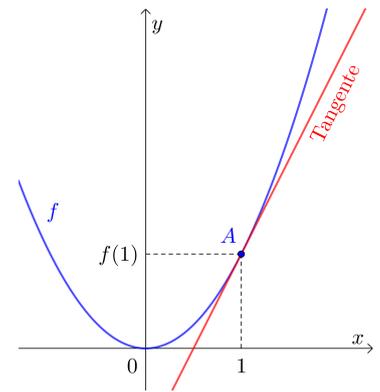
- 2) Für $h \rightarrow 0$ geht die Sekantensteigung also auf den Wert zu.

„Ganz egal, wie sich der Punkt B entlang des Graphen auf den Punkt A hinbewegt, die Steigung der Sekanten strebt immer gegen dieselbe Zahl k .“

Wir schreiben dafür auch:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$$

Dieser **Grenzwert** ist die Steigung von f an der Stelle 1, also die Steigung der Tangente im Punkt A .



- 3) Ermittle die Gleichung $y = k \cdot x + d$ der Tangente im Punkt A .

Der Funktionsgraph von f verläuft durch die beiden Punkte $A = (x_0 | f(x_0))$ und $B = (x_1 | f(x_1))$.

Der Punkt A ist fest, der Punkt B ist auf dem Graphen beweglich.

A ist wie ein Gelenk für die Sekanten.

Es gilt also $x_1 = x_0 + h$ mit einer Zahl $h \neq 0$.

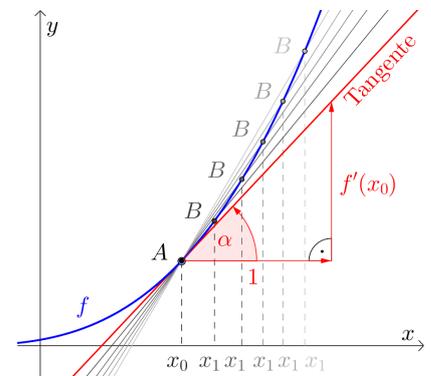
Für die **Steigung der Sekante** durch A und B gilt dann:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Für die **Steigung der Tangente** von f an der Stelle x_0

schreiben wir kurz $f'(x_0)$: „f strich von x_0 “

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Wenn dieser Grenzwert existiert, dann sagen wir: „ f ist **differenzierbar** an der Stelle x_0 .“

Dieser Grenzwert $x_1 \rightarrow x_0$ bzw. $h \rightarrow 0$ existiert *nicht* immer. Mehr dazu findest du am [Arbeitsblatt – Differenzierbarkeit](#).

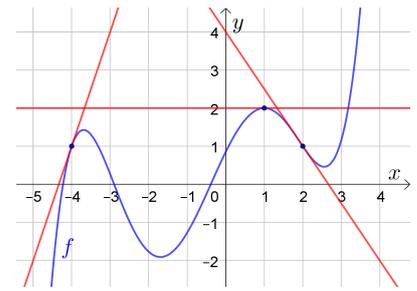
Der **Differentialquotient** $f'(x_0)$ misst die **lokale Änderungsrate** von f an der Stelle x_0 .

Für den **Steigungswinkel** α an der Stelle x_0 gilt dann: $\tan(\alpha) = f'(x_0)$

$f(x_0)$ und $f'(x_0)$ ablesen 

Rechts sind ein Funktionsgraph und 3 Tangenten dargestellt.
Lies die folgenden Funktionswerte und Steigungen ab.

$f(-4) =$ $f(1) =$ $f(2) =$
 $f'(-4) =$ $f'(1) =$ $f'(2) =$



Ableitungsfunktion 

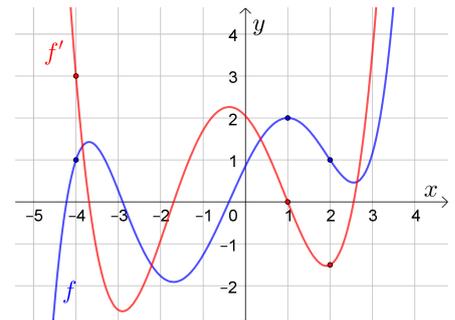
Polynomfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen sowie die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens sind an *jeder* Stelle in ihrem Definitionsbereich differenzierbar.

Ist eine Funktion f an *jeder* Stelle differenzierbar, können wir ihre **Ableitungsfunktion f'** ermitteln.

Rechts sind die Graphen einer Polynomfunktion f und ihrer Ableitungsfunktion f' dargestellt.

Der Funktionswert $f'(x)$ ist gleich groß wie die Steigung von f an der Stelle x .

Das Vorzeichen von f' legt das **Monotonieverhalten** von f fest.



Ableitungsfunktion von $f(x) = x^2$ 

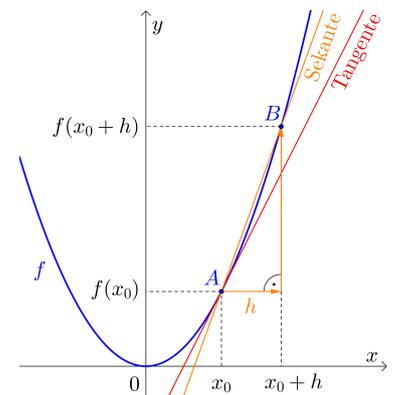
Rechts ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ dargestellt.

Wir ermitteln eine Gleichung ihrer Ableitungsfunktion f' .

Der Funktionsgraph verläuft durch die Punkte $A = (x_0 | f(x_0))$ und $B = (x_0 + h | f(x_0 + h))$ mit $h \neq 0$.

- Die Steigung der Sekante durch A und B hängt von x_0 und h ab. Vereinfache die Formel für die Steigung so weit wie möglich.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

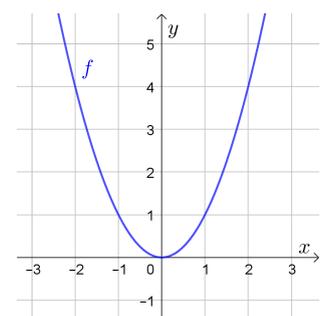


- Die Steigung der Tangente im Punkt $A = (x_0 | f(x_0))$ hängt von x_0 ab. Ermittle den Grenzwert $h \rightarrow 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

- Die quadratische Funktion f mit $f(x) = x^2$ hat also die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) =$.

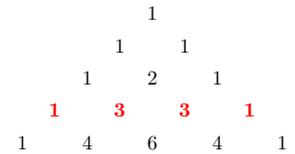
Zeichne den Funktionsgraphen von f' rechts ein.



Ableitungsfunktion von $f(x) = x^3$ 

Wir ermitteln die Ableitungsfunktion f' der Funktion f mit $f(x) = x^3$.

- 1) Eine Sekante verläuft durch die Punkte $A = (x_0 | f(x_0))$ und $B = (x_0 + h | f(x_0 + h))$.
 Stelle mithilfe von x_0 und $h \neq 0$ eine Formel für die Steigung der Sekante auf.
 Vereinfache so weit wie möglich. Zum Ausmultiplizieren von $(a + b)^3$ kannst du das [Pascalsche Dreieck](#) verwenden.



- 2) Ermittle die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 .

- 3) Die Funktion f mit $f(x) = x^3$ hat also die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) =$.

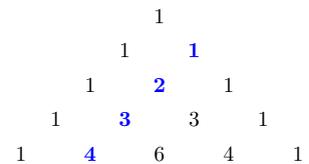
Ableitungsfunktion von $f(x) = x^n$ 

Beim Differenzieren von [Potenzfunktionen](#) $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Muster.

Dabei sind die rechts markierten Zahlen im Pascalschen Dreieck wesentlich.

Schaue dir die Berechnungen für $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^3$ nochmal an.

Die Funktion $f(x) = x^{42}$ hat also die Ableitungsfunktion $f'(x) =$.



Ableitungsfunktion von $f(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4$ 

Wir ermitteln die Ableitungsfunktion f' der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4$.

- 1) Eine Sekante verläuft durch die Punkte $A = (x_0 | f(x_0))$ und $B = (x_0 + h | f(x_0 + h))$.
 Stelle mithilfe von x_0 und $h \neq 0$ eine Formel für die Steigung der Sekante auf.
 Vereinfache so weit wie möglich.

- 2) Ermittle die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 .

- 3) Die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4$ hat also die Ableitungsfunktion $f'(x) =$.

