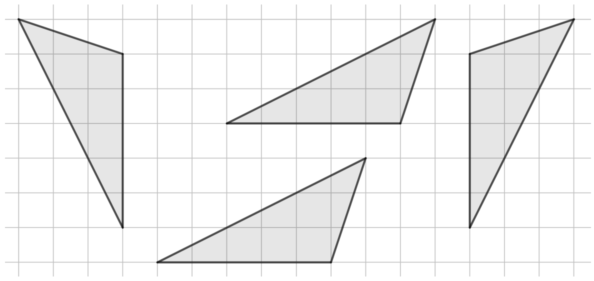
Kongruenz

Die rechts dargestellten Dreiecke können durch eine Abfolge von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen ineinander übergeführt werden.

Genau in so einem Fall sagen wir: Die Dreiecke sind zueinander **kongruent** bzw. **deckungsgleich**.

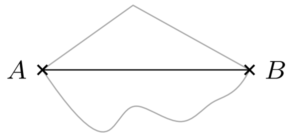
Wenn du die Dreiecke *perfekt* ausschneidest, dann passen sie alle *exakt* aufeinander.



Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Kongruenz und Ähnlichkeit.

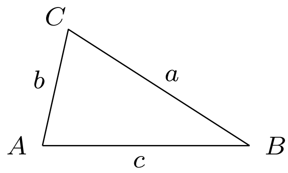
Dreiecksungleichung

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte A und B ist *eindeutig* die Strecke AB.



Erkläre damit, warum die Seitenlängen a, b und c in jedem Dreieck die **Dreiecksungleichungen** erfüllen müssen:

$$\boldsymbol{a+b>c} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{a+c>b} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b+c>a}$$



Die kürzeste Verbindung von A und B ist die Strecke mit Länge c. Also muss $a+b$ größer als c sein.

Kongruenzsätze

Von den 3 Seitenlängen und den 3 Winkeln eines Dreiecks kennst du insgesamt 3 Bestimmungsstücke.

Lässt sich das Dreieck mit diesen 3 Bestimmungsstücken (bis auf Kongruenz) *eindeutig* konstruieren?

Im Folgenden beantworten wir diese Frage systematisch zu jeder möglichen Kombination.

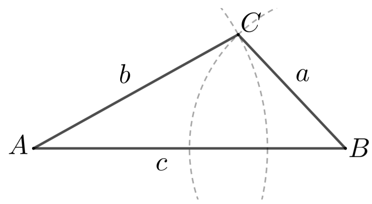
a) **Drei Seitenlängen** und **kein Winkel** sind bekannt:

Seiten-Seiten-Seiten-Satz

Drei Seitenlängen $a = 4\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 8\,\text{cm}$ sind bekannt. a, b und c erfüllen die Dreiecksungleichungen.

Dann können wir das Dreieck (bis auf Kongruenz) *eindeutig* konstruieren:

- **i)** Seite AB mit Länge c konstruieren
- **ii)** Kreis mit Radius b und Mittelpunkt A konstruieren
- **iii)** Kreis mit Radius a und Mittelpunkt B konstruieren
- **iv)** C ist einer der beiden Schnittpunkte der Kreise.
  Der andere Schnittpunkt liefert ein gespiegeltes Dreieck.



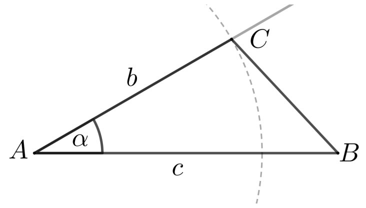
Konstruiere das Dreieck:

b) Zwei Seitenlängen und **ein Winkel** sind bekannt.
Dann gibt es 2 Möglichkeiten, wie der Winkel zu den beiden Seiten liegen kann:

Seiten-Winkel-Seiten-Satz

Zwei Seitenlängen $b = 7\,\text{cm}$, $c = 8\,\text{cm}$ und der **eingeschlossene Winkel** $\alpha = 30°$ sind bekannt.
Dann können wir das Dreieck (bis auf Kongruenz) *eindeutig* konstruieren:

- **i)** Seite AB mit Länge c konstruieren
- **ii)** Strahl von Punkt A mit Winkel α konstruieren
- **iii)** Kreis mit Radius b und Mittelpunkt A konstruieren
- **iv)** C ist der Schnittpunkt von Kreis und Strahl.



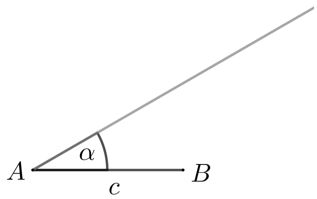
Konstruiere das Dreieck:

Seiten-Seiten-Winkel-Satz

Zwei Seitenlängen a und $c = 8\,\text{cm}$ und ein ***nicht* eingeschlossener Winkel** $\alpha = 30°$ sind bekannt.

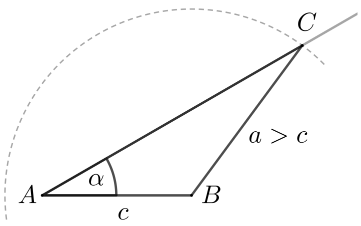
Dann beginnen wir die Konstruktion folgendermaßen:

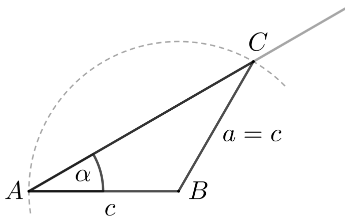
- **i)** Seite AB mit Länge c konstruieren
- **ii)** Strahl von Punkt A mit Winkel α konstruieren
- **iii)** Kreis mit Radius a und Mittelpunkt B konstruieren



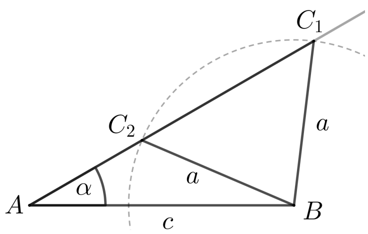
Die Anzahl der Lösungen hängt von der Seitenlänge a ab.

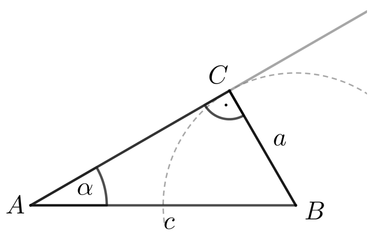
- Wenn a mindestens so lang wie c ist, dann gibt es genau eine Lösung:

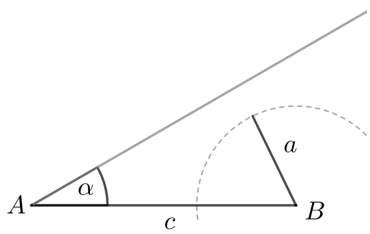




- Wenn a kürzer als c ist, dann gibt es entweder zwei Lösungen oder eine Lösung oder keine Lösung:







Wenn $a = c \cdot \sin(\alpha)$ gilt, dann ist das (bis auf Kongruenz) eindeutige Dreieck rechtwinkelig.
Mehr zu der Winkelfunktion Sinus (sin) findest du auf dem Arbeitsblatt – Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck.

c) **Eine Seitenlänge** und **zwei Winkel** sind bekannt.
Dann gibt es zwei Möglichkeiten, wie die Seite zu den beiden Winkeln liegen kann:

Winkel-Seiten-Winkel-Satz

Eine Seitenlänge $c = 8\,\text{cm}$ und die **zwei anliegenden Winkel** $\alpha = 30°$, $\beta = 40°$ sind bekannt.
Dann können wir das Dreieck (bis auf Kongruenz) *eindeutig* konstruieren:

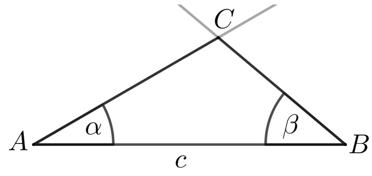
$\alpha + \beta < 180°$

i) Seite AB mit Länge c konstruieren

ii) Strahl von Punkt A mit Winkel α konstruieren

iii) Strahl von Punkt B mit Winkel β konstruieren

iv) C ist der Schnittpunkt der beiden Strahlen.



Konstruiere das Dreieck:

Seiten-Winkel-Winkel-Satz

Eine Seitenlänge $c = 8\,\text{cm}$, ein **anliegender Winkel** $\alpha = 45°$
und der **gegenüberliegende Winkel** $\gamma = 80°$ sind bekannt.
Dann können wir das Dreieck (bis auf Kongruenz) *eindeutig* konstruieren:

$\alpha + \gamma < 180°$

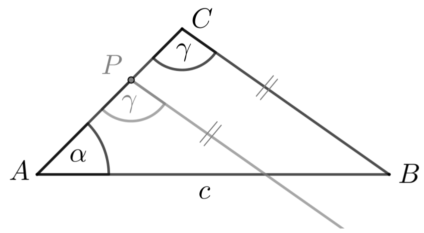
i) Seite AB mit Länge c konstruieren

ii) Strahl von Punkt A mit Winkel α konstruieren

iii) beliebigen Punkt P auf dem Strahl wählen

iv) Strahl von Punkt P mit Winkel γ konstruieren

v) Strahl durch den Punkt B parallel verschieben



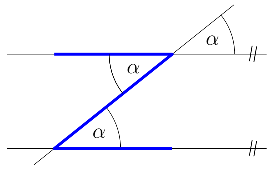
Konstruiere das Dreieck:

d) Keine Seitenlänge und **drei Winkel** sind bekannt:

Parallelwinkel

Zwei parallele Geraden werden von einer dritten Gerade geschnitten.
Die rechts eingezeichneten Winkel sind dann gleich groß.
Solche Winkel nennen wir **Parallelwinkel**.

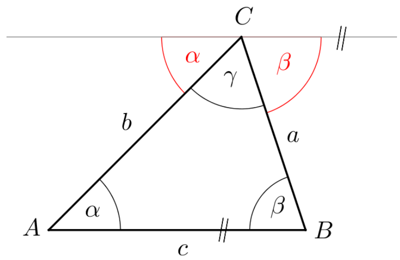
Z-Regel



Winkelsumme

Erkläre, warum die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° ist.

Die beiden eingezeichneten Winkel im Punkt C sind α und β.
(Parallelwinkel / Z-Regel)
Also gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



Damit ein Dreieck mit 3 gegebenen Winkeln konstruierbar ist, muss also die Winkelsumme 180° sein.
Die Angabe des dritten Winkels liefert dann aber *keine* zusätzliche Information über das Dreieck.

W:W:W-Satz

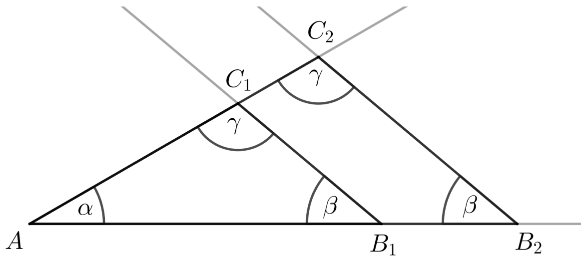
Die **drei Winkel** $\alpha = 30°$, $\beta = 40°$, $\gamma = 110°$ eines Dreiecks sind bekannt.
Dann können wir *unendlich* viele Dreiecke mit diesen Winkeln konstruieren:

i) Seite AB mit *beliebiger* Länge konstruieren

ii) Strahl von Punkt A mit Winkel α konstruieren

iii) Strahl von Punkt B mit Winkel β konstruieren

iv) C ist der Schnittpunkt der beiden Strahlen.

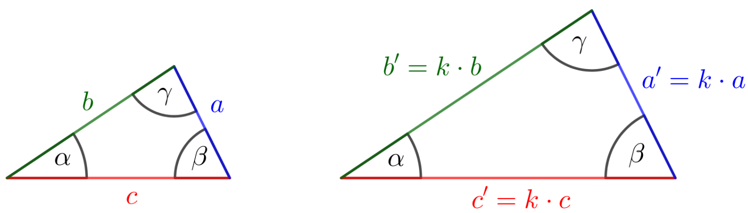


Konstruiere ein mögliches Dreieck:

Ähnlichkeit

Die beiden rechts unten dargestellten Dreiecke stimmen in ihren Winkeln paarweise überein.
Aus dem Strahlensatz und seiner Umkehrung folgt, dass die Dreiecke zueinander ähnlich sind.
In den beiden Dreiecken haben entsprechende Seitenlängen dasselbe Verhältnis:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$



Mehr dazu findest du auf den Arbeitsblättern AB – Strahlensatz und AB – Kongruenz und Ähnlichkeit.