

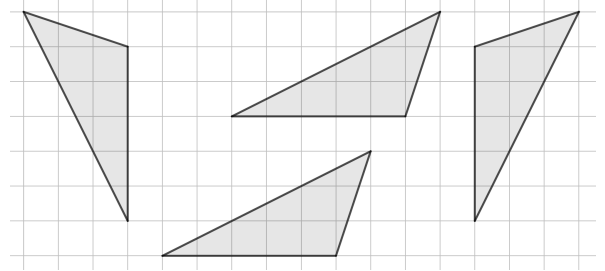


Die rechts dargestellten Dreiecke können durch eine Abfolge von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen ineinander übergeführt werden.

Genau in so einem Fall sagen wir: Die Dreiecke sind zueinander **kongruent** bzw. **deckungsgleich**.

Wenn du die Dreiecke *perfekt* ausschneidest, dann passen sie alle *exakt* aufeinander.

Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Kongruenz und Ähnlichkeit](#).

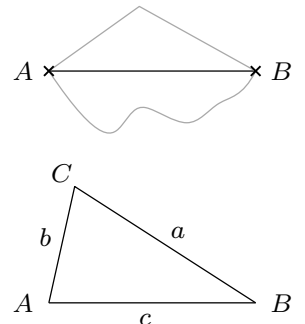


Die kürzeste Verbindung zweier Punkte A und B ist *eindeutig* die Strecke AB .

Erkläre damit, warum die Seitenlängen a , b und c in jedem Dreieck die **Dreiecksungleichungen** erfüllen müssen:

$$a + b > c \quad \text{und} \quad a + c > b \quad \text{und} \quad b + c > a$$

Die kürzeste Verbindung von A und B ist die Strecke mit Länge c . Also muss $a + b$ größer als c sein.



Von den 3 Seitenlängen und den 3 Winkeln eines Dreiecks kennst du insgesamt 3 Bestimmungsstücke.

Lässt sich das Dreieck mit diesen 3 Bestimmungsstücken (bis auf Kongruenz) *eindeutig* konstruieren?

Im Folgenden beantworten wir diese Frage systematisch zu jeder möglichen Kombination.

a) Drei Seitenlängen und kein Winkel sind bekannt:

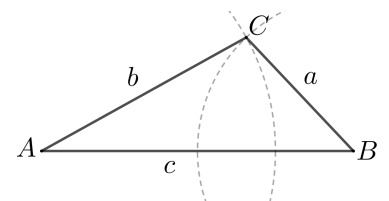


Drei Seitenlängen $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 8$ cm sind bekannt. a , b und c erfüllen die Dreiecksungleichungen. Dann können wir das Dreieck (bis auf Kongruenz) *eindeutig* konstruieren:

- i) Seite AB mit Länge c konstruieren
- ii) Kreis mit Radius b und Mittelpunkt A konstruieren
- iii) Kreis mit Radius a und Mittelpunkt B konstruieren
- iv) C ist einer der beiden Schnittpunkte der Kreise.

Der andere Schnittpunkt liefert ein gespiegeltes Dreieck.

Konstruiere das Dreieck:



b) **Zwei Seitenlängen und ein Winkel** sind bekannt.

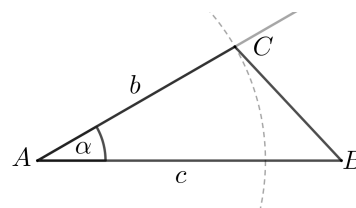
Dann gibt es 2 Möglichkeiten, wie der Winkel zu den beiden Seiten liegen kann:

Seiten-Winkel-Seiten-Satz



Zwei Seitenlängen $b = 7\text{ cm}$, $c = 8\text{ cm}$ und der **eingeschlossene Winkel** $\alpha = 30^\circ$ sind bekannt. Dann können wir das Dreieck (bis auf Kongruenz) *eindeutig* konstruieren:

- Seite AB mit Länge c konstruieren
- Strahl von Punkt A mit Winkel α konstruieren
- Kreis mit Radius b und Mittelpunkt A konstruieren
- C ist der Schnittpunkt von Kreis und Strahl.



Konstruiere das Dreieck:

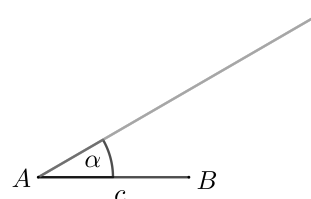
Seiten-Seiten-Winkel-Satz



Zwei Seitenlängen a und $c = 8\text{ cm}$ und ein **nicht eingeschlossener Winkel** $\alpha = 30^\circ$ sind bekannt.

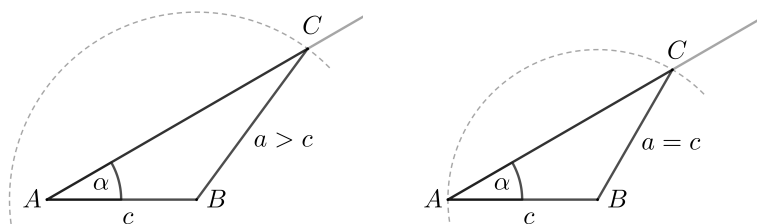
Dann beginnen wir die Konstruktion folgendermaßen:

- Seite AB mit Länge c konstruieren
- Strahl von Punkt A mit Winkel α konstruieren
- Kreis mit Radius a und Mittelpunkt B konstruieren

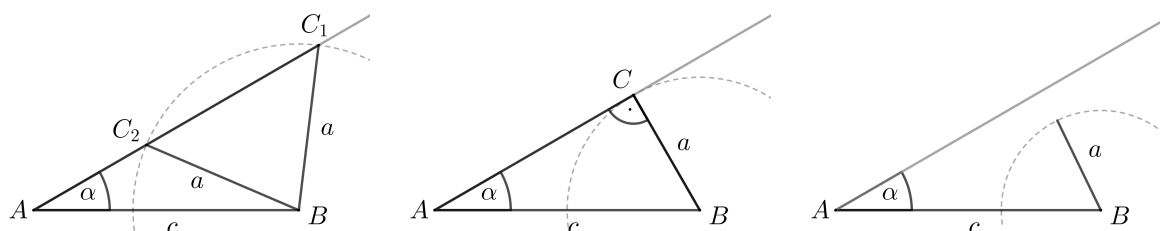


Die Anzahl der Lösungen hängt von der Seitenlänge a ab.

- Wenn a mindestens so lang wie c ist, dann gibt es genau eine Lösung:



- Wenn a kürzer als c ist, dann gibt es entweder zwei Lösungen oder eine Lösung oder keine Lösung:



Wenn $a = c \cdot \sin(\alpha)$ gilt, dann ist das (bis auf Kongruenz) eindeutige Dreieck rechtwinkelig.

Mehr zu der Winkelfunktion Sinus ($\sin$) findest du auf dem [Arbeitsblatt – Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck](#).

c) **Eine Seitenlänge** und **zwei Winkel** sind bekannt.

Dann gibt es zwei Möglichkeiten, wie die Seite zu den beiden Winkeln liegen kann:

Winkel-Seiten-Winkel-Satz



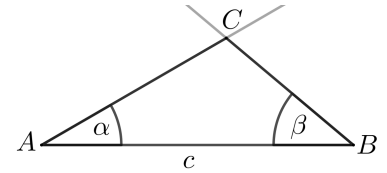
MmF

Eine Seitenlänge $c = 8\text{ cm}$ und die **zwei anliegenden Winkel** $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 40^\circ$ sind bekannt.

Dann können wir das Dreieck (bis auf Kongruenz) *eindeutig* konstruieren:

$$\alpha + \beta < 180^\circ$$

- i) Seite AB mit Länge c konstruieren
- ii) Strahl von Punkt A mit Winkel α konstruieren
- iii) Strahl von Punkt B mit Winkel β konstruieren
- iv) C ist der Schnittpunkt der beiden Strahlen.



Konstruiere das Dreieck:

Seiten-Winkel-Winkel-Satz



MmF

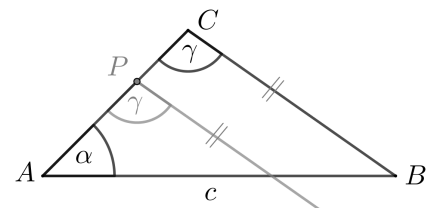
Eine Seitenlänge $c = 8\text{ cm}$, ein **anliegender Winkel** $\alpha = 45^\circ$

und der **gegenüberliegende Winkel** $\gamma = 80^\circ$ sind bekannt.

$$\alpha + \gamma < 180^\circ$$

Dann können wir das Dreieck (bis auf Kongruenz) *eindeutig* konstruieren:

- i) Seite AB mit Länge c konstruieren
- ii) Strahl von Punkt A mit Winkel α konstruieren
- iii) beliebigen Punkt P auf dem Strahl wählen
- iv) Strahl von Punkt P mit Winkel γ konstruieren
- v) Strahl durch den Punkt B parallel verschieben



Konstruiere das Dreieck:

d) Keine Seitenlänge und drei Winkel sind bekannt:

Parallelwinkel



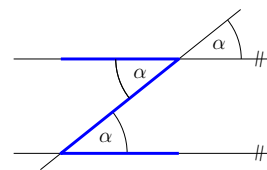
MmF

Zwei parallele Geraden werden von einer dritten Gerade geschnitten.

Die rechts eingezeichneten Winkel sind dann gleich groß.

Solche Winkel nennen wir **Parallelwinkel**.

Z-Regel



Winkelsumme



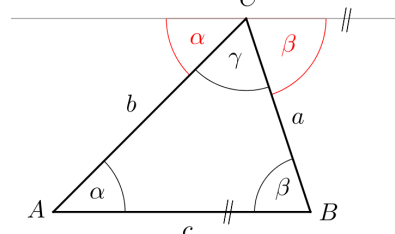
MmF

Erkläre, warum die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° ist.

Die beiden eingezeichneten Winkel im Punkt C sind α und β .

(Parallelwinkel / Z-Regel)

Also gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.



Damit ein Dreieck mit 3 gegebenen Winkeln konstruierbar ist, muss also die Winkelsumme 180° sein. Die Angabe des dritten Winkels liefert dann aber *keine* zusätzliche Information über das Dreieck.

W:W:W-Satz

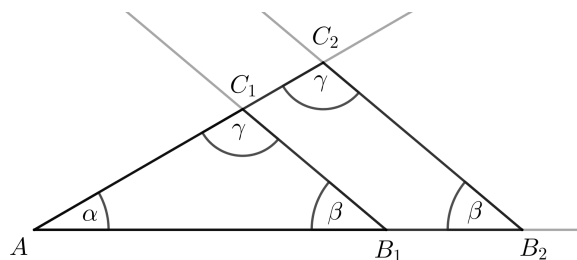


MmF

Die **drei Winkel** $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 110^\circ$ eines Dreiecks sind bekannt.

Dann können wir *unendlich* viele Dreiecke mit diesen Winkeln konstruieren:

- Seite AB mit *beliebiger* Länge konstruieren
- Strahl von Punkt A mit Winkel α konstruieren
- Strahl von Punkt B mit Winkel β konstruieren
- C ist der Schnittpunkt der beiden Strahlen.



Konstruiere ein mögliches Dreieck:

Ähnlichkeit



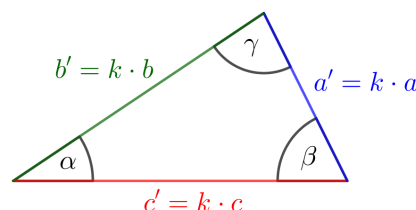
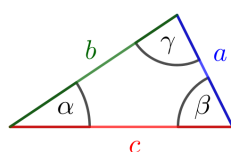
MmF

Die beiden rechts unten dargestellten Dreiecke stimmen in ihren Winkeln paarweise überein.

Aus dem **Strahlensatz** und seiner Umkehrung folgt, dass die Dreiecke zueinander **ähnlich** sind.

In den beiden Dreiecken haben entsprechende Seitenlängen dasselbe Verhältnis:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$



Mehr dazu findest du auf den Arbeitsblättern **AB – Strahlensatz** und **AB – Kongruenz und Ähnlichkeit**.

