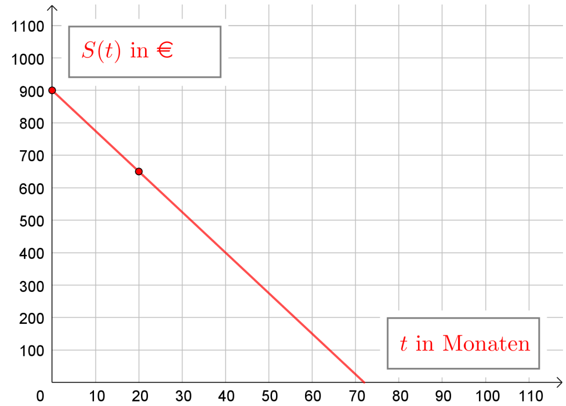
Lineare Funktion

Der Wert eines Smartphones nimmt linear ab.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Wert des Smartphones € 900.
Nach 20 Monaten beträgt der Wert nur mehr € 650.
Die Funktion $S$ ordnet jedem Zeitpunkt den aktuellen Wert des Smartphones zu.
$t \dots$ Zeit in Monaten
$S(t) \dots$ Wert des Smartphones in €




**1)** Skizziere rechts den Funktionsgraphen von $S$.
Beschrifte die Achsen und skaliere sie geeignet.

**2)** Ermittle eine Funktionsgleichung von $S$.

**3)** In der folgenden Wertetabelle fehlen zwei Werte.
Berechne sie und trage sie in die Wertetabelle ein.

| $t$ in Monaten | 42 | 32 |
|---|---|---|
| $S(t)$ in € | 375 | 500 |

**4)** Berechne die Nullstelle von $S$, und interpretiere ihren Wert im Sachzusammenhang.

Anmerkung: Das lineare Modell vereinfacht die Realität hier stark.
Du wirst andere Funktionstypen kennenlernen, die hier vielleicht realistischer wären.

Die Funktion $S$ ist genau für jene Zeitpunkte $t \geq 0$ definiert, an denen $S(t) \geq 0$ gilt.

**5)** Ermittle die Definitionsmenge $D$ und die (kleinstmögliche) Wertemenge $W$ der Funktion.

**2)** $S(t) = k \cdot t + d$

$$k = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{650 - 900}{20 - 0} \frac{€}{\text{Monat}} = -12{,}5\,€/\text{Monat}$$

$$S(0) = 900 \iff k \cdot 0 + d = 900 \iff d = 900\,€$$

$$\text{Funktionsgleichung: } S(t) = -12{,}5 \cdot t + 900$$

**3)** $S(42) = -12{,}5 \cdot 42 + 900 = 375$

$S(t) = 500 \iff 500 = -12{,}5 \cdot t + 900 \iff 12{,}5 \cdot t = 400 \iff t = 32$

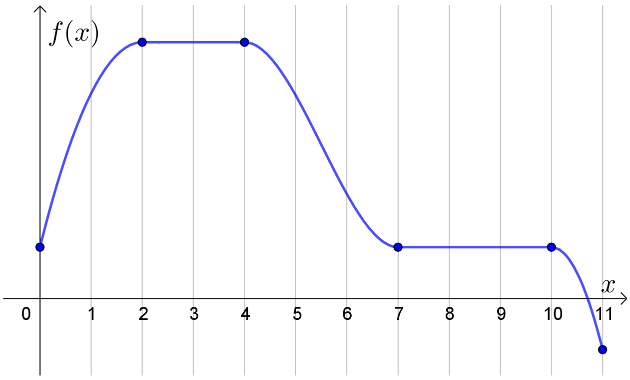
**4)** $S(t) = 0 \iff 0 = -12{,}5 \cdot t + 900 \iff 12{,}5 \cdot t = 900 \iff t = 72$

In diesem Modell hat das Smartphone nach 72 Monaten den Wert € 0.

**5)** $D = [0\,\text{Monate}; 72\,\text{Monate}]$ $\qquad W = [€\,0; €\,900]$

### Monotonieverhalten

Rechts ist der Graph einer Funktion $f$ im Intervall $[0;11]$ dargestellt.




$f$ ist **konstant** in den Intervallen $[2;4]$ und $[7;10]$.
Das heißt, für alle $x_1, x_2 \in [2;4]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) = f(x_2)$

$f$ ist **streng monoton steigend** im Intervall $[0;2]$.
Das heißt, für alle $x_1, x_2 \in [0;2]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$

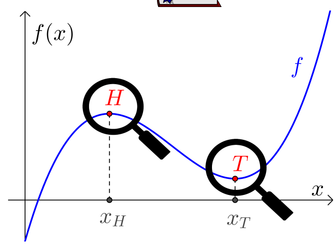
$f$ ist **monoton steigend** im Intervall $[0;4]$.
Das heißt, für alle $x_1, x_2 \in [0;4]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$

$f$ ist **streng monoton fallend** im Intervall $[4;7]$.
Das heißt, für alle $x_1, x_2 \in [4;7]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) > f(x_2)$

$f$ ist **monoton fallend** im Intervall $[2;11]$.
Das heißt, für alle $x_1, x_2 \in [2;11]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$

### Extremstellen & Extrempunkte

Am Graphen der rechts dargestellten Funktion $f$ sind ein **Hochpunkt $\boldsymbol{H}$** und ein **Tiefpunkt $\boldsymbol{T}$** eingezeichnet.

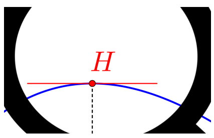



Solche Punkte werden auch **Extrempunkte** genannt.
Die zugehörigen Stellen $\boldsymbol{x_H}$ und $\boldsymbol{x_T}$ sind **Extremstellen**.

In einem Hochpunkt ist der Funktionswert *lokal* am größten. Es gilt also

$$f(x_H) \geq f(x)$$

für alle $x$ im Definitionsbereich nahe um $x_H$.
Blicken wir nahe genug auf den Hochpunkt, dann sehen wir *keine* größeren Funktionswerte:

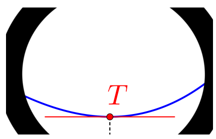



$H$ heißt deshalb auch **lokales Maximum**.

In einem Tiefpunkt ist der Funktionswert *lokal* am kleinsten. Es gilt also

$$f(x_T) \leq f(x)$$

für alle $x$ im Definitionsbereich nahe um $x_T$.
Blicken wir nahe genug auf den Tiefpunkt, dann sehen wir *keine* kleineren Funktionswerte:




$T$ heißt deshalb auch **lokales Minimum**.

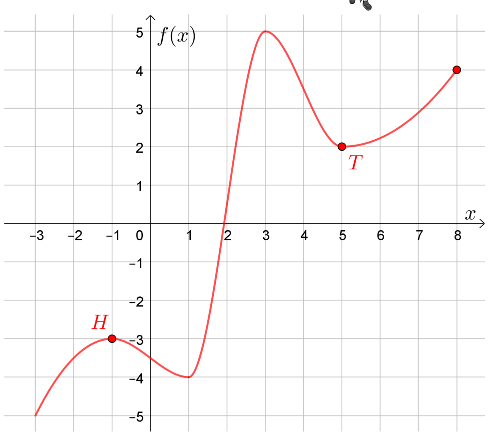
Mithilfe der Differentialrechnung werden wir Extrempunkte berechnen. Die Funktion ändert dort ihr Monotonieverhalten.

### Monotonieverhalten

Eine Funktion $f$ ist auf dem Intervall $[-3;8]$ definiert.
Sie hat die folgenden Eigenschaften:

- Hochpunkt $H = (-1 \mid -3)$
- Tiefpunkt $T = (5 \mid 2)$
- $f(8) = 4$

Skizziere rechts einen möglichen Funktionsgraphen von $f$.



**Schnittstelle / Schnittpunkt**

Rechts sind die Graphen zweier Funktionen $f$ und $g$ dargestellt.

Es gibt drei Stellen, an denen die beiden Funktionen jeweils den gleichen Funktionswert haben.
Diese drei Stellen sind die **Schnittstellen** von $f$ und $g$.
Sie sind die Lösungen der Gleichung $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$.

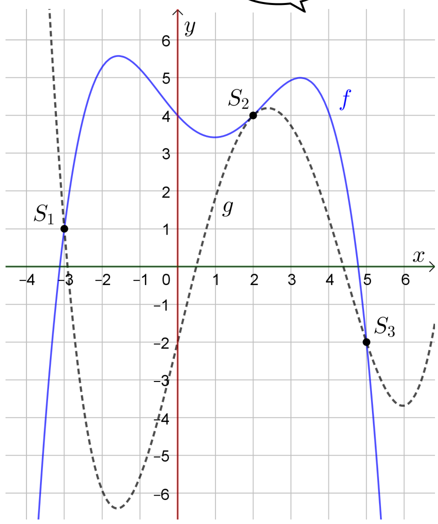
Die drei **Schnittpunkte** $S_1$, $S_2$ und $S_3$ sind rechts eingezeichnet.
Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein:

**i)** $f(-3) = g(-3) = 1 \implies S_1 = (-3 \mid 1)$

**ii)** $f(2) = g(2) = 4 \implies S_2 = (2 \mid 4)$

**iii)** $f(5) = g(5) = -2 \implies S_3 = (5 \mid -2)$

Im Schnittpunkt $S_2$ haben die beiden Funktionen nicht nur den gleichen Funktionswert, sondern auch die gleiche Steigung.
In diesem Fall nennen wir den Schnittpunkt auch **Berührpunkt**.




**Schnittstelle / Schnittpunkt**

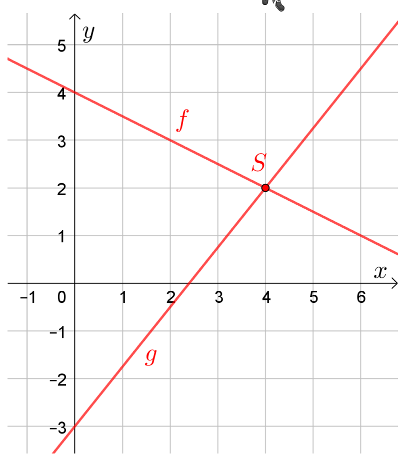
Für die lineare Funktion $f$ gilt: $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 4$
Für die lineare Funktion $g$ gilt: $g(x) = \frac{5}{4} \cdot x - 3$

**1)** Berechne den Schnittpunkt von $f$ und $g$.

**2)** Zeichne rechts die Graphen von $f$ und $g$ ein.

$$f(x) = g(x)$$
$$-\frac{1}{2} \cdot x + 4 = \frac{5}{4} \cdot x - 3$$
$$-2 \cdot x + 16 = 5 \cdot x - 12$$
$$28 = 7 \cdot x$$
$$x = 4$$

$$f(4) = g(4) = 2 \implies S = (4 \mid 2)$$




**Verschiebung und Skalierung**

Für die lineare Funktion $f$ gilt: $f(x) = 3 \cdot x - 6$
Mithilfe von $f$ wird eine lineare Funktion $g$ gebildet:

**a)** $g(x) = 2 \cdot f(x)$ **c)** $g(x) = -f(x)$ **e)** $g(x) = f(x) - 2$
**b)** $g(x) = f(2 \cdot x)$ **d)** $g(x) = f(-x)$ **f)** $g(x) = f(x - 2)$

Ermittle eine Gleichung der linearen Funktion $g$ in der Form $g(x) = k \cdot x + d$.

**a)** $g(x) = 2 \cdot (3 \cdot x - 6) = 6 \cdot x - 12$

**b)** $g(x) = 3 \cdot (2 \cdot x) - 6 = 6 \cdot x - 6$

**c)** $g(x) = -(3 \cdot x - 6) = -3 \cdot x + 6$

**d)** $g(x) = 3 \cdot (-x) - 6 = -3 \cdot x - 6$

**e)** $g(x) = (3 \cdot x - 6) - 2 = 3 \cdot x - 8$

**f)** $g(x) = 3 \cdot (x - 2) - 6 = 3 \cdot x - 12$

Allgemein sind die Graphen der Funktionen $f$ und $g$ mit $g(x) = a \cdot f(b \cdot x + c) + d$ eng miteinander verknüpft. Mehr zur grafischen Interpretation der Parameter $a$, $b$, $c$ und $d$ findest du am Arbeitsblatt – Verschiebung und Skalierung von Funktionsgraphen.

**Periodizität** MmF

Die rechts unten dargestellte Funktion $f$ ist **periodisch** mit Periode $p = 4$.
Es gilt nämlich an jeder Stelle $x$:

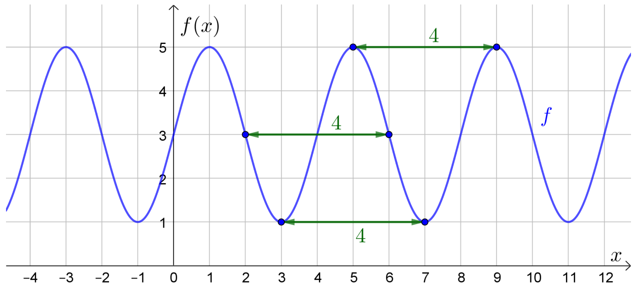
$$\boldsymbol{f(x) = f(x + p)}$$

Zum Beispiel:

$$\cdots = \underbrace{f(-4)}_{=3} = \underbrace{f(0)}_{=3} = \underbrace{f(4)}_{=3} = \underbrace{f(8)}_{=3} = \cdots$$

$$\cdots = \underbrace{f(-3)}_{=5} = \underbrace{f(1)}_{=5} = \underbrace{f(5)}_{=5} = \underbrace{f(9)}_{=5} = \cdots$$

Die Zahl 4 ist die kürzeste Periode dieser Funktion.
Jedes Vielfache von 4 ist auch eine Periode der Funktion.



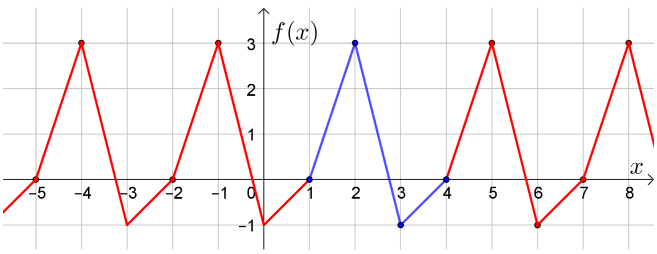

Jede allgemeine Sinusfunktion $f$ mit

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c$$

ist periodisch. Die Periode hängt von $\omega$ ab.

**Periodizität** MmF

Setze den Funktionsgraphen von $f$ im dargestellten Bereich so fort, dass $f$ periodisch mit Periode 3 ist.



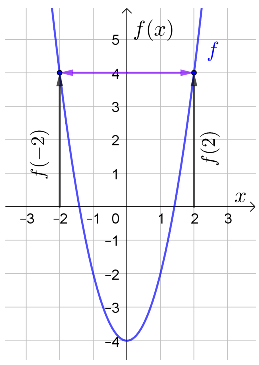

**Gerade Funktion / Ungerade Funktion** MmF

Der Graph der Funktion $f$ ist symmetrisch zur senkrechten Achse.

An jeder Stelle $x$ gilt:

$$\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$$

In diesem Fall nennt man $f$ auch eine **gerade Funktion**.

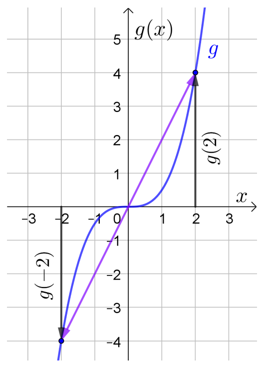



Der Graph der Funktion $g$ ist symmetrisch zum Punkt $(0 \mid 0)$.

An jeder Stelle $x$ gilt:

$$\boldsymbol{g(-x) = -g(x)}$$

In diesem Fall nennt man $g$ auch eine **ungerade Funktion**.

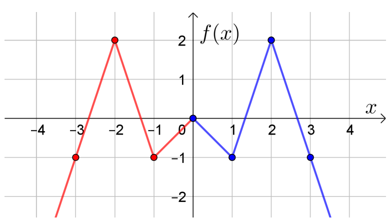



Jede Potenzfunktion $p$ mit $p(x) = a \cdot x^m$ ist – je nach Wert von $m \in \mathbb{Z}^*$ – entweder gerade oder ungerade.

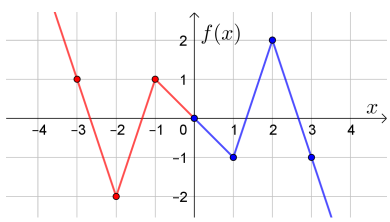
**Gerade Funktion / Ungerade Funktion** MmF

Setze den Funktionsgraphen von $f$ für $x < 0$ so fort, dass $f$ eine …

… gerade Funktion ist.




… ungerade Funktion ist.



**Division durch 0**

Die Division $\frac{3}{0}$ ist *nicht* definiert. Es gibt *keine* Zahl, die mit 0 multipliziert, die Zahl 3 ergibt.

Streiche jeweils die falsche Antwort durch:

**i)** Wenn ☺ „ein bisschen" größer als 0 ist, $\frac{3}{0{,}000\,01}$

dann ist $\frac{3}{☺}$ eine betragsmäßig „sehr große" positive ~~/ negative~~ Zahl.

**ii)** Wenn ☺ „ein bisschen" kleiner als 0 ist, $\frac{3}{-0{,}000\,01}$

dann ist $\frac{3}{☺}$ eine betragsmäßig „sehr große" ~~positive /~~ negative Zahl.

**Polstelle**

Die Funktion $f$ mit $f(x) = \frac{3}{x-4}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert außer für $x = 4$.

Streiche jeweils die falsche Antwort durch:

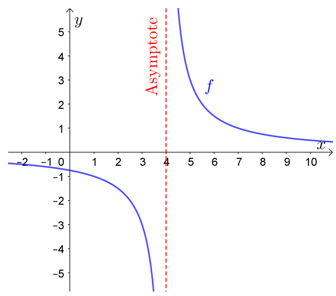
**i)** Wenn $x$ „ein bisschen" größer als 4 ist, $\frac{3}{0{,}000\,01}$
dann ist $f(x)$ eine betragsmäßig „sehr große" positive ~~/ negative~~ Zahl.

**ii)** Wenn $x$ „ein bisschen" kleiner als 4 ist, $\frac{3}{-0{,}000\,01}$
dann ist $f(x)$ eine betragsmäßig „sehr große" ~~positive /~~ negative Zahl.

**iii)** Wenn $x$ eine betragsmäßig „sehr große" positive Zahl ist, $\frac{3}{100\,000}$
dann ist $f(x)$ eine betragsmäßig „sehr kleine" positive ~~/ negative~~ Zahl.

**iv)** Wenn $x$ eine betragsmäßig „sehr große" negative Zahl ist, $\frac{3}{-100\,000}$
dann ist $f(x)$ eine betragsmäßig „sehr kleine" ~~positive /~~ negative Zahl.

Der Graph der Funktion $f$ ist rechts dargestellt.




Die Stelle $x = 4$ nennt man in diesem Fall auch **Polstelle**.

Die senkrechte Gerade durch die Polstelle nennt man **Asymptote**.

Die Funktionswerte werden in jeder Umgebung der Polstelle betragsmäßig beliebig groß.

**Polstelle**

Die Funktion $f$ mit $f(x) = \frac{-42}{(x+3)\cdot(x-2)}$ hat die Polstellen $x = -3$ und $x = 2$.

**1)** Der Graph schneidet die senkrechte Achse in $(0 \mid 7)$.

**2)** Trage jeweils das Vorzeichen $(+\,/\,-)$ von $f(x)$ unten ein.

| | $x < -3$ | $-3 < x < 2$ | $x > 2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ |

**3)** Wie viele Nullstellen hat $f$? Keine, weil $\frac{-42}{☺} \neq 0$.

**4)** Skizziere rechts den Funktionsgraphen von $f$.