Euklidischer Algorithmus

Wir können den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen mithilfe der Primfaktorzerlegung berechnen. Jetzt berechnen wir $\mathrm{ggT}(603, 114)$ mit dem **Euklidischen Algorithmus**:

1) „Wie oft geht 114 in 603? 5 Mal, 33 Rest.“ $603 = 114 \cdot \boxed{5} + \boxed{33}$

2) „Wie oft geht 33 in 114? 3 Mal, 15 Rest.“ $114 = \boxed{33} \cdot \boxed{3} + \boxed{15}$

3) „Wie oft geht 15 in 33? 2 Mal, 3 Rest.“ $\boxed{33} = \boxed{15} \cdot \boxed{2} + \boxed{\mathbf{3}}$ $\Longrightarrow \mathrm{ggT}(603, 114) = 3$

4) „Wie oft geht 3 in 15? 5 Mal, 0 Rest.“ $\boxed{15} = \boxed{\mathbf{3}} \cdot \boxed{5} + \boxed{0}$

Der letzte Rest $\neq 0$ ist der gesuchte größte gemeinsame Teiler.

Euklidischer Algorithmus

Berechne $\mathrm{ggT}(630, 282)$ und $\mathrm{ggT}(876, 612)$ mit dem Euklidischen Algorithmus.

$630 = 282 \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$282 = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$\boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$\boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$\boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$\Longrightarrow \mathrm{ggT}(630, 282) = \boxed{}$

$876 = 612 \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$612 = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$\boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$\boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$\Longrightarrow \mathrm{ggT}(876, 612) = \boxed{}$

Warum funktioniert der Euklidische Algorithmus?

Um zu erklären, warum der Euklidische Algorithmus tatsächlich den größten gemeinsamen Teiler liefert, verwenden wir die folgenden 3 Eigenschaften:

1) Für positive natürlichen Zahlen a und b mit $a \mid b$ gilt: $\mathrm{ggT}(a, b) = \boxed{}$

2) $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, a)$

3) $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, b + k \cdot a)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

t ist ein Teiler von a. $\Longleftrightarrow$ Es gibt eine ganze Zahl c mit $a = c \cdot t$.
Erkläre: Aus $t \mid a$ und $t \mid b$ folgt $t \mid (b + k \cdot a)$.
Erkläre: Aus $t \mid a$ und $t \mid (b + k \cdot a)$ folgt $t \mid b$.

Rechts siehst du die Schritte des Euklidischen Algorithmus in umgekehrter Reihenfolge.

Erkläre mit den 3 Rechenregeln, warum der letzte Rest $\neq 0$ tatsächlich der größte gemeinsame Teiler ist.

$\boxed{15} = \boxed{\mathbf{3}} \cdot \boxed{5} + \boxed{0}$ $\quad \stackrel{1)}{\Longrightarrow} \mathrm{ggT}(15, 3) = \boxed{}$

$\boxed{33} = \boxed{15} \cdot \boxed{2} + \boxed{\mathbf{3}}$ $\quad \stackrel{2,3)}{\Longrightarrow} \mathrm{ggT}(33, 15) = \boxed{}$

$114 = \boxed{33} \cdot \boxed{3} + \boxed{15}$ $\quad \stackrel{2,3)}{\Longrightarrow} \mathrm{ggT}(114, 33) = \boxed{}$

$603 = 114 \cdot \boxed{5} + \boxed{33}$ $\quad \stackrel{2,3)}{\Longrightarrow} \mathrm{ggT}(603, 114) = \boxed{}$

Ganzzahlige Linearkombinationen

Findest du zwei *ganze* Zahlen für die Lücken, damit die folgende Gleichung stimmt?

$$42 \cdot \boxed{} + 15 \cdot \boxed{} = 3$$

Warum können keine *ganzen* Zahlen in die Lücken passen, damit die folgende Gleichung gilt?

$$14 \cdot \boxed{} + 6 \cdot \boxed{} = 3$$

Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Der größte gemeinsame Teiler von a und b kann stets als ganzzahlige Linearkombination von a und b dargestellt werden. Es gibt also ganze Zahlen r und s, für die gilt:

$$a \cdot \boxed{r} + b \cdot \boxed{s} = \mathrm{ggT}(a, b)$$

Lemma von Bézout

Der **Euklidische Algorithmus** hilft uns diese ganzen Zahlen r und s zu ermitteln.

Zum Beispiel: $\mathrm{ggT}(603, 114) = \mathbf{3}$
Gesucht sind ganze Zahlen r und s, für die gilt:

$$603 \cdot r + 114 \cdot s = \mathbf{3}$$

1) Wir formen die Zeilen vom Euklidischen Algorithmus jeweils auf den Rest um.

2) Wir setzen rückwärts ein, um die ganzen Zahlen r und s zu ermitteln:

$$603 = 114 \cdot \boxed{5} + \boxed{33} \implies 33 = 603 - 114 \cdot 5$$
$$114 = \boxed{33} \cdot \boxed{3} + \boxed{15} \implies 15 = 114 - 33 \cdot 3$$
$$\boxed{33} = \boxed{15} \cdot \boxed{2} + \boxed{\mathbf{3}} \implies \mathbf{3} = 33 - 15 \cdot 2$$
$$\boxed{15} = \boxed{\mathbf{3}} \cdot \boxed{5} + \boxed{0}$$

$$\mathbf{3} = 33 - 15 \cdot 2 = 33 - (114 - 33 \cdot 3) \cdot 2 = 33 \cdot 7 - 114 \cdot 2 =$$
$$= (603 - 114 \cdot 5) \cdot 7 - 114 \cdot 2 = 603 \cdot 7 - 114 \cdot 37$$

$$\implies 603 \cdot \boxed{} + 114 \cdot \boxed{} = \mathbf{3}$$

Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Ermittle $\mathrm{ggT}(700, 297)$ sowie ganze Zahlen r und s, für die gilt: $700 \cdot r + 297 \cdot s = \mathrm{ggT}(700, 297)$