Euklidischer Algorithmus

Wir können den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen mithilfe der Primfaktorzerlegung berechnen.
Jetzt berechnen wir $\text{ggT}(603, 114)$ mit dem **Euklidischen Algorithmus**:

1) „Wie oft geht 114 in 603? 5 Mal, 33 Rest.“ $603 = 114 \cdot \boxed{5} + \boxed{33}$

2) „Wie oft geht 33 in 114? 3 Mal, 15 Rest.“ $114 = \boxed{33} \cdot \boxed{3} + \boxed{15}$

3) „Wie oft geht 15 in 33? 2 Mal, 3 Rest.“ $\boxed{33} = \boxed{15} \cdot \boxed{2} + \boxed{\mathbf{3}}$ $\implies \text{ggT}(603, 114) = 3$

4) „Wie oft geht 3 in 15? 5 Mal, 0 Rest.“ $\boxed{15} = \boxed{\mathbf{3}} \cdot \boxed{5} + \boxed{0}$

Der letzte Rest $\neq 0$ ist der gesuchte größte gemeinsame Teiler.

Euklidischer Algorithmus

Berechne $\text{ggT}(630, 282)$ und $\text{ggT}(876, 612)$ mit dem Euklidischen Algorithmus.

$630 = 282 \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$282 = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$\boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$\boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$\boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$\implies \text{ggT}(630, 282) = \_\_\_\_$

$876 = 612 \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$612 = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$\boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$\boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}$

$\implies \text{ggT}(876, 612) = \_\_\_\_$

Warum funktioniert der Euklidische Algorithmus?

Um zu erklären, warum der Euklidische Algorithmus tatsächlich den größten gemeinsamen Teiler liefert, verwenden wir die folgenden 3 Eigenschaften:

1) Für positive natürlichen Zahlen a und b mit $a \mid b$ gilt: $\text{ggT}(a, b) = \_\_\_\_$

2) $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a)$

3) $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a, b + k \cdot a)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

t ist ein Teiler von a. $\iff$ Es gibt eine ganze Zahl c mit $a = c \cdot t$.
Erkläre: Aus $t \mid a$ und $t \mid b$ folgt $t \mid (b + k \cdot a)$.
Erkläre: Aus $t \mid a$ und $t \mid (b + k \cdot a)$ folgt $t \mid b$.

Rechts siehst du die Schritte des Euklidischen Algorithmus in umgekehrter Reihenfolge.

Erkläre mit den 3 Rechenregeln, warum der letzte Rest $\neq 0$ tatsächlich der größte gemeinsame Teiler ist.

$\boxed{15} = \boxed{\mathbf{3}} \cdot \boxed{5} + \boxed{0}$ $\overset{1)}{\implies} \text{ggT}(15, 3) = \_\_\_\_$

$\boxed{33} = \boxed{15} \cdot \boxed{2} + \boxed{\mathbf{3}}$ $\overset{2,3)}{\implies} \text{ggT}(33, 15) = \_\_\_\_$

$114 = \boxed{33} \cdot \boxed{3} + \boxed{15}$ $\overset{2,3)}{\implies} \text{ggT}(114, 33) = \_\_\_\_$

$603 = 114 \cdot \boxed{5} + \boxed{33}$ $\overset{2,3)}{\implies} \text{ggT}(603, 114) = \_\_\_\_$

Ganzzahlige Linearkombinationen

Findest du zwei *ganze* Zahlen für die Lücken, damit die folgende Gleichung stimmt?

$$42 \cdot \boxed{} + 15 \cdot \boxed{} = 3$$

Warum können keine *ganzen* Zahlen in die Lücken passen, damit die folgende Gleichung gilt?

$$14 \cdot \boxed{} + 6 \cdot \boxed{} = 3$$

Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Der größte gemeinsame Teiler von a und b kann stets als ganzzahlige Linearkombination von a und b dargestellt werden. Es gibt also ganze Zahlen r und s mit

$$a \cdot \boxed{r} + b \cdot \boxed{s} = \operatorname{ggT}(a, b).$$

Lemma von Bézout

Der **Euklidische Algorithmus** hilft uns diese Koeffizienten r und s zu finden.

Zum Beispiel: $\operatorname{ggT}(603, 114) = \mathbf{3}$
Gesucht sind ganze Zahlen r und s mit

$$603 \cdot r + 114 \cdot s = \mathbf{3}.$$

1) Wir formen die Zeilen vom Euklidischen Algorithmus jeweils auf den Rest um.

2) Wir setzen rückwärts ein, um die ganzen Zahlen r und s zu ermitteln:

$$\begin{aligned}
603 &= 114 \cdot \boxed{5} + \boxed{33} &&\Longrightarrow\ 33 = 603 - 114 \cdot 5\\
114 &= \boxed{33} \cdot \boxed{3} + \boxed{15} &&\Longrightarrow\ 15 = 114 - 33 \cdot 3\\
\boxed{33} &= \boxed{15} \cdot \boxed{2} + \boxed{\mathbf{3}} &&\Longrightarrow\ \mathbf{3} = 33 - 15 \cdot 2\\
\boxed{15} &= \boxed{\mathbf{3}} \cdot \boxed{5} + \boxed{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{3} &= 33 - 15 \cdot 2 = 33 - (114 - 33 \cdot 3) \cdot 2 = 33 \cdot 7 - 114 \cdot 2 =\\
&= (603 - 114 \cdot 5) \cdot 7 - 114 \cdot 2 = 603 \cdot 7 - 114 \cdot 37
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ 603 \cdot \boxed{} + 114 \cdot \boxed{} = \mathbf{3}$$

Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Ermittle $\operatorname{ggT}(700, 297)$ sowie ganze Zahlen r und s mit $700 \cdot r + 297 \cdot s = \operatorname{ggT}(700, 297)$.