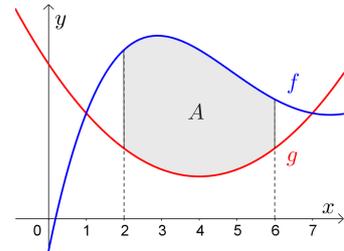
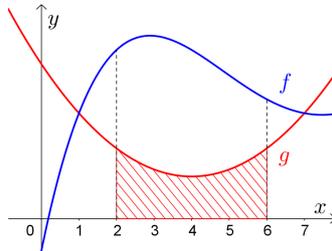
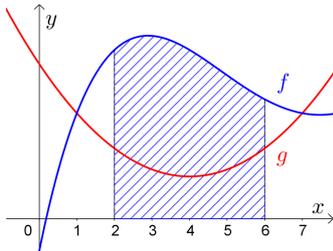


- 1) Zeichne links unten eine Fläche mit Inhalt $\int_2^6 f(x) dx$ ein.
- 2) Zeichne im mittleren Bild eine Fläche mit Inhalt $\int_2^6 g(x) dx$ ein.
- 3) Zeichne rechts unten eine Fläche mit Inhalt $\int_2^6 f(x) dx - \int_2^6 g(x) dx = \int_2^6 (f(x) - g(x)) dx$ ein.



Flächeninhalt zwischen Funktionsgraphen 

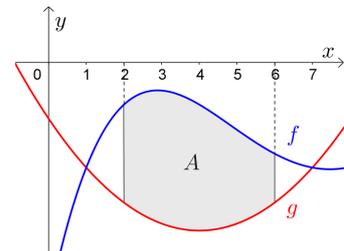
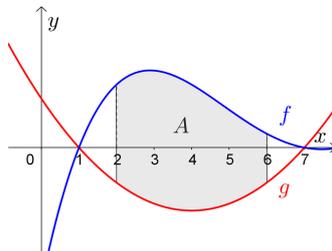
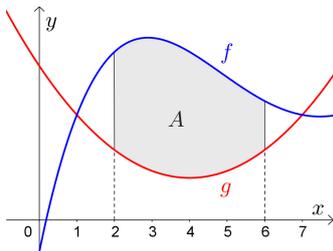
Sind f und g **stetige** Funktionen mit $f(x) \geq g(x)$ für alle x im Intervall $[a; b]$, dann ist

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

der Flächeninhalt zwischen den Graphen von f und g im Intervall $[a; b]$.

Vertikale Verschiebung 

Wir verschieben beide Funktionsgraphen um dieselbe Konstante nach unten:



Der eingezeichnete Flächeninhalt A zwischen den Graphen verändert sich dabei *nicht*.

In allen drei Bildern gilt somit: $A = \int_2^6 (f(x) - g(x)) dx$

Das Ergebnis hängt also *nicht* davon ab, ob die Funktionswerte positiv oder negativ sind.

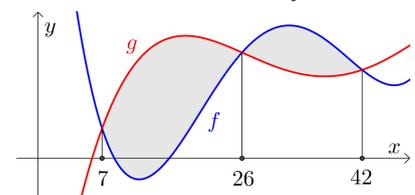
Es kommt nur darauf an, dass für alle Stellen x im Intervall $f(x) \geq g(x)$ gilt.

Schnittstellen 

Die rechts dargestellten Graphen der Funktionen f und g schließen grau markierte Flächen ein.

Stelle mithilfe von f und g eine Formel zur Berechnung des gesamten Inhalts der grau markierten Flächen auf.

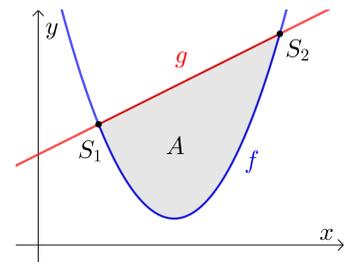
$$\int_7^{26} (g(x) - f(x)) dx + \int_{26}^{42} (f(x) - g(x)) dx$$



Für die rechts dargestellten Funktionen f und g gilt:

$$f(x) = x^2 - 9 \cdot x + 22 \quad \text{bzw.} \quad g(x) = x + 6$$

- 1) Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2 .
- 2) Berechne den Flächeninhalt A mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.



- 1) An den Schnittstellen sind die Funktionswerte von f und g gleich:

$$f(x) = g(x) \iff x^2 - 9 \cdot x + 22 = x + 6 \iff \underbrace{x^2 - 10 \cdot x + 16 = 0}_{=(x-2) \cdot (x-8)}$$

Die quadratische Lösung hat die beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 8$.

$$f(2) = g(2) = 8 \implies S_1 = (2 \mid 8) \qquad f(8) = g(8) = 14 \implies S_2 = (8 \mid 14)$$

- 2) Im Intervall $[2; 8]$ gilt: $g(x) \geq f(x)$

$$g(x) - f(x) = (x + 6) - (x^2 - 9 \cdot x + 22) = -x^2 + 10 \cdot x - 16$$

$$A = \int_2^8 (-x^2 + 10 \cdot x - 16) dx = \left. -\frac{1}{3} \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 16 \cdot x \right|_2^8 = 21,33... - (-14,66...) = 36$$

Für die rechts dargestellten Funktionen f und g gilt:

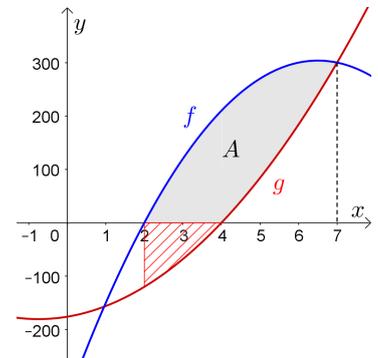
$$f(x) = -15 \cdot x^2 + 195 \cdot x - 330 \quad \text{bzw.} \quad g(x) = 8 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 176$$

Der markierte Flächeninhalt A soll berechnet werden.

- 1) Lukas rechnet: $\int_2^7 (f(x) - g(x)) dx$

Erkläre, warum er damit *nicht* den Flächeninhalt A berechnet.

- 2) Berechne den Flächeninhalt A .



- 1) Lukas berechnet damit den Inhalt einer größeren Fläche (siehe rechts oben).

$$2) \int_2^7 f(x) dx = \left. -5 \cdot x^3 + \frac{195}{2} \cdot x^2 - 330 \cdot x \right|_2^7 = 752,5 - (-310) = 1062,5$$

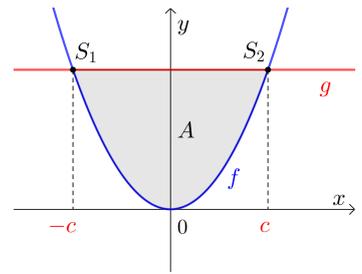
$$\int_4^7 g(x) dx = \left. \frac{8}{3} \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 176 \cdot x \right|_4^7 = -23,33... - (-437,33) = 414$$

$$\implies A = 1062,5 - 414 = 648,5$$

Für die rechts dargestellten Funktionen f und g gilt:

$$f(x) = x^2 \quad \text{bzw.} \quad g(x) = c^2 \quad \text{mit } c > 0$$

- 1) Stelle mithilfe von c eine Formel für die beiden Schnittstellen auf.
- 2) Berechne die positive Zahl c so, dass die grau markierte Fläche den Inhalt $A = 36$ hat.



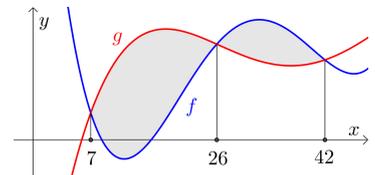
$$1) \quad f(x) = g(x) \iff x^2 = c^2 \iff x = c \quad \text{oder} \quad x = -c$$

$$2) \quad A = 2 \cdot \int_0^c (c^2 - x^2) dx = 2 \cdot \left(c^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^c = 2 \cdot \left(c^3 - \frac{c^3}{3} \right) = \frac{4 \cdot c^3}{3}$$

$$A = 36 \iff \frac{4 \cdot c^3}{3} = 36 \iff c^3 = 27 \iff c \in \mathbb{R} \iff c = 3$$

Für den gesamten Inhalt A der rechts grau markierten Flächen gilt:

$$A = \int_7^{26} (g(x) - f(x)) dx + \int_{26}^{42} (f(x) - g(x)) dx$$



Die Terme $g(x) - f(x)$ und $f(x) - g(x)$ unterscheiden sich nur um das Vorzeichen.

$$5 - 9 = -4 = -(9 - 5)$$

Mithilfe von **Betragsstrichen** können wir auch kürzere Formeln für A angeben:

$$|5 - 9| = 4 = |9 - 5|$$

$$A = \int_7^{42} |f(x) - g(x)| dx \quad \text{bzw.} \quad A = \int_7^{42} |g(x) - f(x)| dx$$

Diese Schreibweise kann auch bei der Berechnung von A mit Technologieeinsatz **weiterhelfen**.

Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

$$\int_2^5 (g(x) - f(x)) dx = 10$$

$$\int_2^9 (g(x) - f(x)) dx = -12$$

$$\int_5^9 (g(x) - f(x)) dx = -22$$

$$\int_2^9 |g(x) - f(x)| dx = 32$$

