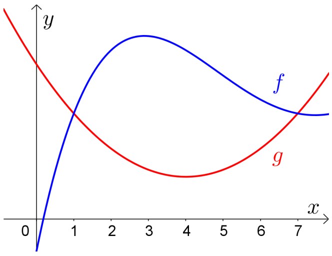
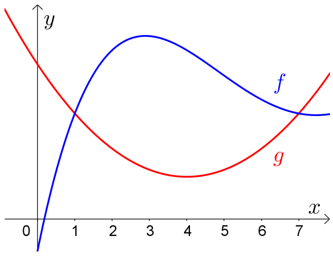
Oben – Unten

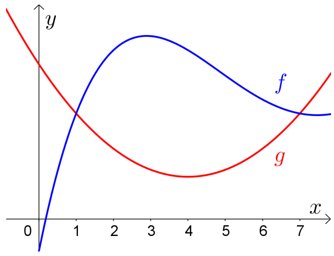
1) Zeichne links unten eine Fläche mit Inhalt $\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x$ ein.

2) Zeichne im mittleren Bild eine Fläche mit Inhalt $\int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x$ ein.

3) Zeichne rechts unten eine Fläche mit Inhalt $\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^6 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$ ein.







Flächeninhalt zwischen Funktionsgraphen

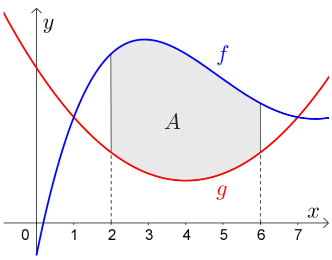
Sind f und g stetige Funktionen mit $\boldsymbol{f(x) \geq g(x)}$ für alle x im Intervall $[a;b]$, dann ist

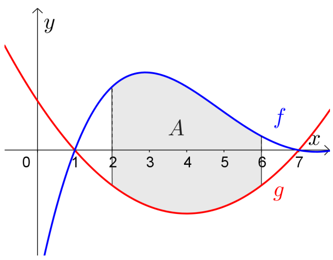
$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x}$$

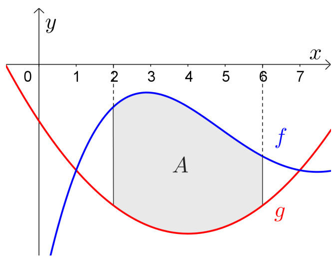
der Flächeninhalt zwischen den Graphen von f und g im Intervall $[a;b]$.

Vertikale Verschiebung

Wir verschieben beide Funktionsgraphen um dieselbe Konstante nach unten:







Der eingezeichnete Flächeninhalt A zwischen den Graphen verändert sich dabei *nicht*.

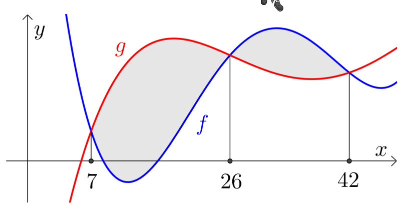
In allen drei Bildern gilt somit: $A = \int_2^6 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$

Das Ergebnis hängt also *nicht* davon ab, ob die Funktionswerte positiv oder negativ sind.

Es kommt nur darauf an, dass für alle Stellen x im Intervall $f(x) \geq g(x)$ gilt.

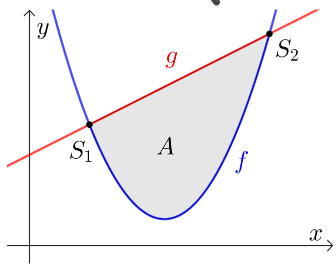
Schnittstellen

Die rechts dargestellten Graphen der Funktionen f und g schließen grau markierte Flächen ein.
Stelle mithilfe von f und g eine Formel zur Berechnung des gesamten Inhalts der grau markierten Flächen auf.



Linear – Quadratisch

Für die rechts dargestellten Funktionen f und g gilt:



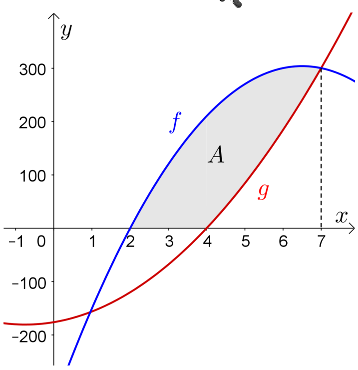
$$f(x) = x^2 - 9 \cdot x + 22 \qquad \text{bzw.} \qquad g(x) = x + 6$$

1) Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2.

2) Berechne den Flächeninhalt A mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Integralgrenzen

Für die rechts dargestellten Funktionen f und g gilt:



$$f(x) = -15 \cdot x^2 + 195 \cdot x - 330 \quad \text{bzw.} \quad g(x) = 8 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 176$$

Der markierte Flächeninhalt A soll berechnet werden.

1) Lukas rechnet: $\displaystyle\int_2^7 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$

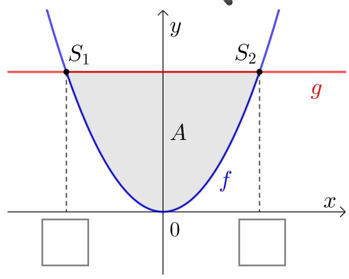
Erkläre, warum er damit *nicht* den Flächeninhalt A berechnet.

2) Berechne den Flächeninhalt A.

Umkehraufgabe

Für die rechts dargestellten Funktionen f und g gilt:

$$f(x) = x^2 \qquad \text{bzw.} \qquad g(x) = c^2 \quad \text{mit } c > 0$$



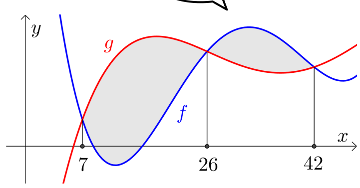
1) Stelle mithilfe von c eine Formel für die beiden Schnittstellen auf.

2) Berechne die positive Zahl c so, dass die grau markierte Fläche den Inhalt $A = 36$ hat.

Betrag

Für den gesamten Inhalt der rechts grau markierten Flächen gilt:

$$A = \int_7^{26} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{26}^{42} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$



Die Terme $g(x) - f(x)$ und $f(x) - g(x)$ unterscheiden sich nur um das Vorzeichen.

$5 - 9 = -4 = -(9 - 5)$
$|5 - 9| = 4 = |9 - 5|$

Mithilfe von Betragsstrichen können wir auch kürzere Formeln für A angeben:

$$A = \int_7^{42} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \qquad \text{bzw.} \qquad A = \int_7^{42} |g(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Diese Schreibweise kann auch bei der Berechnung von A mit Technologieeinsatz weiterhelfen.

Orientierter Flächeninhalt

Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

$\int_2^5 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \boxed{}$ $\qquad$ $\int_2^9 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \boxed{}$

$\int_5^9 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \boxed{}$ $\qquad$ $\int_2^9 |g(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = \boxed{}$