Mustererkennung

Du kennst vielleicht Rätsel, bei denen eine Zahlenfolge fortgesetzt werden soll.
Wie würdest du diese Zahlenfolgen fortsetzen?

a) $(2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; \ldots)$

b) $(1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; \ldots)$

c) $(1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; \ldots)$

d) $(1; -2; 4; -8; 16; -32; 64; -128; \ldots)$

e) $(2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; \ldots)$

f) $(1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; \ldots)$

Zahlenfolgen

Bei einer Zahlenfolge (kurz: **Folge**) befinden sich Zahlen in einer festen Reihenfolge:

$$(a_1; a_2; a_3; \ldots)$$

Die einzelnen Zahlen einer Folge nennen wir auch **Folgenglieder**.

Die kleine tiefgestellte Zahl 1 bei a_1 heißt auch **Index**. Der Index hilft uns beim Nummerieren der Folgenglieder.

Wir verwenden die Sprechweise: „a_{42} *ist das* 42. *Folgenglied der Folge.*“

Statt $(a_1; a_2; a_3; \ldots)$ schreiben wir auch kürzer $(a_n)_{n\geq 1}$ oder noch kürzer (a_n).

Mehrdeutigkeit

Wie würdest du die Folge $(3; 5; 7; \ldots)$ fortsetzen?

Lukas setzt so fort: $(3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; \ldots)$ (Folge der ungeraden Zahlen ab 3)
Annika setzt so fort: $(3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23, \ldots)$ (Folge der Primzahlen)

Solche Aufgabenstellungen sind *nicht* eindeutig lösbar. Manche Fortsetzungen können naheliegender als andere sein, aber von richtig oder falsch kann man ohne weitere Informationen *nicht* sprechen.

Explizites Bildungsgesetz

Das **explizite Bildungsgesetz**

$$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot n + 1}$$

legt die Folge $(a_n)_{n\geq 1} = (3; 5; 7; 9; 11; \ldots)$ *eindeutig* fest.
Wir können jedes Folgenglied ausrechnen, indem wir die entsprechende Zahl für n einsetzen:

$n = 1 \implies a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $\qquad$ $n = 3 \implies a_3 = 7$

$n = 2 \implies a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ $\qquad$ $n = 42 \implies a_{42} = 85$

Für die Folge der Primzahlen $(2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; \ldots)$ ist übrigens *kein* explizites Bildungsgesetz bekannt.

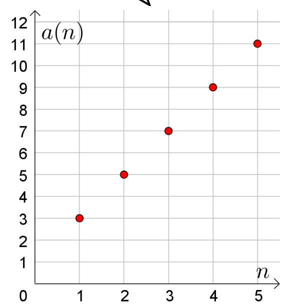
Folge als Funktion

Erinnere dich, dass eine Funktion *jedem* Element ihrer Definitionsmenge *genau ein* Element ihrer Wertemenge zuordnet.

Eine Folge $(a_1; a_2; a_3; \ldots)$ ist also eine Funktion a mit Definitionsmenge $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \ldots\}$ und Funktionswerten $a(n) = a_n$.

Welcher Funktionstyp steckt hinter $a_n = 2 \cdot n + 1$? lineare Funktion

Zeichne die ersten fünf Folgenglieder von $(a_n)_{n\geq 1}$ rechts ein.



Explizites Bildungsgesetz

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ hat das folgende explizite Bildungsgesetz:

$$a_n = n^2 - 5$$

1) Berechne die ersten 5 Folgenglieder:

$a_1 = -4 \qquad a_2 = -1 \qquad a_3 = 4 \qquad a_4 = 11 \qquad a_5 = 20$

2) Das wievielte Folgenglied ist gleich 139?

$$a_n = 139 \iff n^2 - 5 = 139 \iff n^2 = 144 \iff n = \pm 12$$

Das 12. Folgenglied ist 139.

3) Begründe, warum *kein* Folgenglied gleich 75 ist.

$$a_n = 75 \iff n^2 - 5 = 75 \iff n^2 = 80 \iff n = \pm\sqrt{80} = \pm 8{,}94...$$

Die Gleichung $a_n = 75$ hat *keine* Lösung in $\{1; 2; 3; 4; \ldots\}$, also ist *kein* Folgenglied gleich 75.

Rekursives Bildungsgesetz

Das **rekursive Bildungsgesetz**

$$\underbrace{\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + 2}}_{\text{Rekursionsvorschrift}} \quad \text{mit} \quad \underbrace{\boldsymbol{a_1 = 3}}_{\text{Anfangsbedingung}}$$

Beachte, dass bei a_{n+1} das „+1“ im Index steht. a_{n+1} ist also das Folgenglied direkt nach a_n: $(a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; a_{n+1}; \ldots)$

legt die Folge $(a_n)_{n\geq 1} = (3; 5; 7; 9; 11; \ldots)$ *eindeutig* fest:

Die Anfangsbedingung legt fest, mit welchem Wert die Folge startet. Die Rekursionsvorschrift enthält das Muster, wie man von einem zum nächsten Folgenglied kommt („immer +2 rechnen“), also:

$$\begin{array}{lllll} n = 1 & \Longrightarrow & a_{1+1} = a_1 + 2 & \Longrightarrow & a_2 = 3 + 2 = 5 \\ n = 2 & \Longrightarrow & a_{2+1} = a_2 + 2 & \Longrightarrow & a_3 = 5 + 2 = 7 \\ n = 3 & \Longrightarrow & a_{3+1} = a_3 + 2 & \Longrightarrow & a_4 = 7 + 2 = 9 \quad \text{usw.} \end{array}$$

$$(3; \overset{+2}{\curvearrowright} 5; \overset{+2}{\curvearrowright} 7; \overset{+2}{\curvearrowright} 9; \overset{+2}{\curvearrowright} 11; \ldots)$$

Rekursives Bildungsgesetz

Ermittle die ersten 6 Folgenglieder der rekursiv gegebenen Folge.

a) $a_{n+1} = a_n - 3$ mit $a_1 = 8$

$a_2 = 5 \qquad a_3 = 2 \qquad a_4 = -1 \qquad a_5 = -4 \qquad a_6 = -7$

b) $b_{n+1} = b_n \cdot (-2)$ mit $b_1 = 3$

$b_2 = -6 \qquad b_3 = 12 \qquad b_4 = -24 \qquad b_5 = 48 \qquad b_6 = -96$

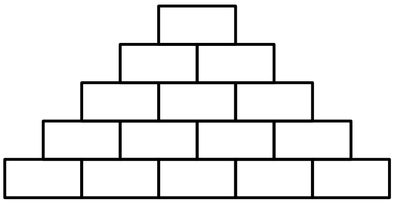
c) $c_{n+1} = c_n + n$ mit $c_1 = 2$

$c_2 = 3 \qquad c_3 = 5 \qquad c_4 = 8 \qquad c_5 = 12 \qquad c_6 = 17$

Turmbau

Der dargestellte Turm wird aus Ziegelsteinen aufgebaut.
Die Anzahl der Ziegelsteine in der n-ten Reihe (von oben gezählt) ist a_n.

$a_1 = 1$
$a_2 = 2$
$a_3 = 3$
$a_4 = 4$
$a_5 = 5$



1) Ermittle ein explizites Bildungsgesetz von $(a_n)_{n\geq 1}$.

$a_n = n$

2) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz von $(a_n)_{n\geq 1}$.

$a_{n+1} = a_n + 1 \quad \text{mit} \quad a_1 = 1$

Fibonacci-Folge

Bei der Fibonacci-Folge (f_n) ist jedes Folgenglied die Summe der beiden vorherigen Folgenglieder:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \text{mit} \quad f_1 = 1,\ f_2 = 1$$

Warum sind 2 Anfangsbedingungen notwendig?

a) Ermittle die ersten 8 Folgenglieder der Fibonacci-Folge.

$f_3 = 2 \qquad f_4 = 3 \qquad f_5 = 5 \qquad f_6 = 8 \qquad f_7 = 13 \qquad f_8 = 21$

b) Im 18. Jahrhundert wurde ein explizites Bildungsgesetz für (f_n) entdeckt und bewiesen:

$$f_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \quad \text{mit} \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Die Zahl φ ist der sogenannte Goldene Schnitt.

Berechne damit das 42. Glied der Fibonacci-Folge: $f_{42} = 267\,914\,296$

Babylonisches Wurzelziehen

Schon vor über 3000 Jahren kannte die Menschheit eine Methode, um $\sqrt{A}$ mit $A > 0$ nur mit den Grundrechnungsarten *beliebig* genau zu berechnen, nämlich:

1) Starte mit einer beliebigen positiven Zahl a_1.

2) Berechne rekursiv $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)$.

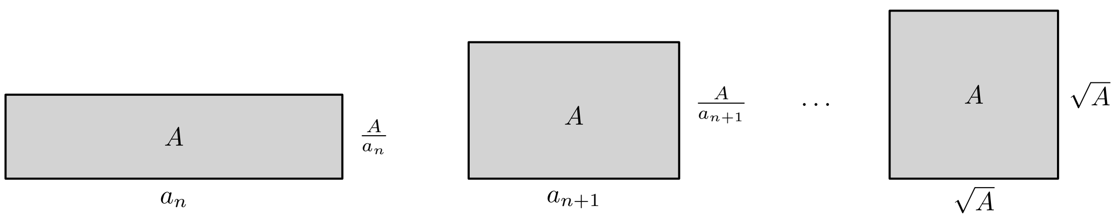
a_{n+1} ist also das arithmetische Mittel von a_n und $\frac{A}{a_n}$.

Probiere das Verfahren mit der Anfangsbedingung $a_1 = 1$ aus, um $\sqrt{2}$ anzunähern:

$a_2 = 1{,}5 \quad a_3 = 1{,}416\,666\,66\ldots \quad a_4 = 1{,}414\,215\,68\ldots \quad a_5 = 1{,}414\,213\,56\ldots$

Tatsächlich stimmen schon die ersten 11 Nachkommastellen von a_5 mit jenen von $\sqrt{2}$ überein.

Die Idee hinter dem Babylonischen Wurzelziehen ist in den folgenden Bildern dargestellt:



a_{n+1} liegt als arithmetisches Mittel von a_n und $\frac{A}{a_n}$ genau in der Mitte zwischen diesen beiden Werten.

Rekursive Strukturen

Bei einem Spiel darf man eine Spielfigur in jedem Zug um entweder 1, 2 oder 3 Felder vorwärts bewegen.
Die Spielfigur steht noch 10 Felder vom Ziel entfernt.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, um die Spielfigur in mehreren Zügen genau auf das Ziel zu bewegen?

Drei dieser Möglichkeiten sind:

i) $3 + 3 + 3 + 1 = 10$

ii) $3 + 3 + 1 + 3 = 10$

iii) $1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 2 = 10$

Ein systematisches Durchgehen aller Möglichkeiten ist hier schon recht mühsam.

Manche mathematischen Probleme werden einfacher lösbar, wenn man sie allgemeiner formuliert:

Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Spielfigur noch n Felder vom Ziel entfernt ist ($n \geq 1$)?
Diese Anzahl kürzen wir mit a_n ab. Die oben gesuchte Anzahl ist also a_{10}.

1) Ermittle a_1, a_2 und a_3.

$a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 4$

Wenn die Spielfigur noch 4 Felder vom Ziel entfernt ist, gibt es 3 Optionen:

- Du bewegst die Spielfigur 1 Feld vorwärts. Dann ist sie noch 3 Felder vom Ziel entfernt.
- Du bewegst die Spielfigur 2 Felder vorwärts. Dann ist sie noch 2 Felder vom Ziel entfernt.
- Du bewegst die Spielfigur 3 Felder vorwärts. Dann ist sie noch 1 Feld vom Ziel entfernt.

3) Wie kannst du also a_4 mithilfe von a_1, a_2 und a_3 berechnen?

$a_4 = a_3 + a_2 + a_1 = 4 + 2 + 1 = 7$

Allgemein gilt für alle $n \geq 4$ das folgende rekursive Bildungsgesetz: $\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}}$

4) Berechne mithilfe dieser Rekursion die gesuchte Anzahl a_{10}.

$a_5 = 13 \quad a_6 = 24 \quad a_7 = 44 \quad a_8 = 81 \quad a_9 = 149 \quad a_{10} = 274$

Relative Bezüge

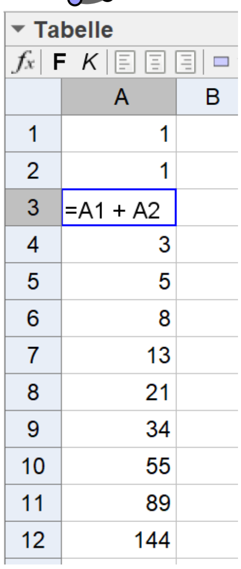
Die Folgen (a_n) und (b_n) sind rekursiv gegeben:

- $a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_1 = 1$
- $b_{n+1} = a_n \cdot b_n$ mit $b_1 = 1$

a) Ermittle die ersten 5 Folgenglieder von (a_n) und (b_n).

$a_2 = 3 \quad a_3 = 5 \quad a_4 = 7 \quad a_5 = 9$

$b_2 = 1 \quad b_3 = 3 \quad b_4 = 15 \quad b_5 = 105$



	A	B
1	1	
2	1	
3	=A1 + A2	
4	3	
5	5	
6	8	
7	13	
8	21	
9	34	
10	55	
11	89	
12	144	

Rechts siehst du, wie man mit einer Tabellenkalkulation auf Knopfdruck die ersten 12 Folgenglieder der Fibonacci-Folge rekursiv berechnen kann.

b) Berechne mit einer Tabellenkalkulation: $b_{10} = 34\,459\,425$