

Mustererkennung



Du kennst vielleicht Rätsel, bei denen eine Zahlenfolge fortgesetzt werden soll.
Wie würdest du diese Zahlenfolgen fortsetzen?

a) $(2; 5; 8; 11; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \dots)$

d) $(1; -2; 4; -8; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \dots)$

b) $(1; 2; 4; 8; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \dots)$

e) $(2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \dots)$

c) $(1; 4; 9; 16; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \dots)$

f) $(1; 1; 2; 3; 5; 8; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \dots)$

Zahlenfolgen



Bei einer Zahlenfolge (kurz: **Folge**) befinden sich Zahlen in einer festen Reihenfolge:

$$(a_1; a_2; a_3; \dots)$$

Die einzelnen Zahlen einer Folge nennen wir auch **Folgenglieder**.

Die kleine tiefgestellte Zahl 1 bei a_1 heißt auch **Index**. Der Index hilft uns beim Nummerieren der Folgenglieder.

Wir verwenden die Sprechweise: „ a_{42} ist das 42. Folgenglied der Folge.“

Statt $(a_1; a_2; a_3; \dots)$ schreiben wir auch kürzer $(a_n)_{n \geq 1}$ oder noch kürzer (a_n) .

Mehrdeutigkeit



Wie würdest du die Folge $(3; 5; 7; \dots)$ fortsetzen?

Lukas setzt so fort: $(3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; \dots)$

(Folge der ungeraden Zahlen ab 3)

Annika setzt so fort: $(3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; \dots)$

(Folge der Primzahlen)

Solche Aufgabenstellungen sind *nicht* eindeutig lösbar. Manche Fortsetzungen können naheliegender als andere sein, aber von richtig oder falsch kann man ohne weitere Informationen *nicht* sprechen.

Explizites Bildungsgesetz



Das **explizite Bildungsgesetz**

$$a_n = 2 \cdot n + 1$$

legt die Folge $(a_n)_{n \geq 1} = (3; 5; 7; 9; 11; \dots)$ *eindeutig* fest.

Wir können jedes Folgenglied ausrechnen, indem wir die entsprechende Zahl für n einsetzen:

$$n = 1 \implies a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$n = 3 \implies a_3 = \boxed{}$$

$$n = 2 \implies a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$n = 42 \implies a_{42} = \boxed{}$$

Für die Folge der Primzahlen $(2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; \dots)$ ist übrigens *kein* explizites Bildungsgesetz bekannt.

Folge als Funktion

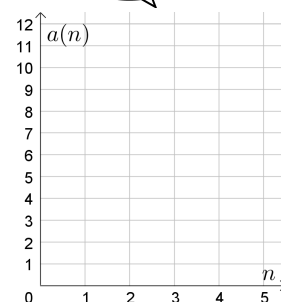


Erinnere dich, dass eine **Funktion** jedem Element ihrer Definitionsmenge *genau ein* Element ihrer Wertemenge zuordnet.

Eine Folge $(a_1; a_2; a_3; \dots)$ ist also eine Funktion a mit Definitionsmenge $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$ und Funktionswerten $a(n) = a_n$.

Welcher Funktionstyp steckt hinter $a_n = 2 \cdot n + 1$?

Zeichne die ersten fünf Folgenglieder von $(a_n)_{n \geq 1}$ rechts ein.





Die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ hat das folgende explizite Bildungsgesetz:

$$a_n = n^2 - 5$$

1) Berechne die ersten 5 Folgenglieder:

$$a_1 = \boxed{} \quad a_2 = \boxed{} \quad a_3 = \boxed{} \quad a_4 = \boxed{} \quad a_5 = \boxed{}$$

2) Das wievielte Folgenglied ist gleich 139?

3) Begründe, warum *kein* Folgenglied gleich 75 ist.



Das **rekursive Bildungsgesetz**

$$\underbrace{a_{n+1} = a_n + 2}_{\text{Rekursionsvorschrift}} \quad \text{mit} \quad \underbrace{a_1 = 3}_{\text{Anfangsbedingung}}$$

Beachte, dass bei a_{n+1} das „+1“ im Index steht.
 a_{n+1} ist also das Folgenglied direkt nach a_n :
 $(a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; a_{n+1}; \dots)$

legt die Folge $(a_n)_{n \geq 1} = (3; 5; 7; 9; 11; \dots)$ *eindeutig* fest:

Die Anfangsbedingung legt fest, mit welchem Wert die Folge startet. Die Rekursionsvorschrift enthält das Muster, wie man von einem zum nächsten Folgenglied kommt („immer +2 rechnen“), also:

$$\begin{array}{llll} n = 1 & \implies & a_{1+1} = a_1 + 2 & \implies & a_2 = 3 + 2 = 5 \\ n = 2 & \implies & a_{2+1} = a_2 + 2 & \implies & a_3 = 5 + 2 = 7 \\ n = 3 & \implies & a_{3+1} = a_3 + 2 & \implies & a_4 = 7 + 2 = 9 \quad \text{usw.} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overset{+2}{\curvearrowright} \overset{+2}{\curvearrowright} \overset{+2}{\curvearrowright} \overset{+2}{\curvearrowright} \\ (3; 5; 7; 9; 11; \dots) \end{array}$$



Ermittle die ersten 6 Folgenglieder der rekursiv gegebenen Folge.

a) $a_{n+1} = a_n - 3$ mit $a_1 = 8$

$$a_2 = \boxed{} \quad a_3 = \boxed{} \quad a_4 = \boxed{} \quad a_5 = \boxed{} \quad a_6 = \boxed{}$$

b) $b_{n+1} = b_n \cdot (-2)$ mit $b_1 = 3$

$$b_2 = \boxed{} \quad b_3 = \boxed{} \quad b_4 = \boxed{} \quad b_5 = \boxed{} \quad b_6 = \boxed{}$$

c) $c_{n+1} = c_n + n$ mit $c_1 = 2$

$$c_2 = \boxed{} \quad c_3 = \boxed{} \quad c_4 = \boxed{} \quad c_5 = \boxed{} \quad c_6 = \boxed{}$$

Bei einem Spiel darf man eine Spielfigur in jedem Zug um entweder 1, 2 oder 3 Felder vorwärts bewegen. Die Spielfigur steht noch 10 Felder vom Ziel entfernt.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, um die Spielfigur in mehreren Zügen genau auf das Ziel zu bewegen?

Drei dieser Möglichkeiten sind:

i) $3 + 3 + 3 + 1 = 10$

ii) $3 + 3 + 1 + 3 = 10$

iii) $1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 2 = 10$



Ein systematisches Durchgehen aller Möglichkeiten ist hier schon recht mühsam.

Manche mathematischen Probleme werden einfacher lösbar, wenn man sie allgemeiner formuliert:

Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Spielfigur noch n Felder vom Ziel entfernt ist ($n \geq 1$)?

Diese Anzahl kürzen wir mit a_n ab. Die oben gesuchte Anzahl ist also a_{10} .

1) Ermittle a_1 , a_2 und a_3 .

$$a_1 = \boxed{} \quad a_2 = \boxed{} \quad a_3 = \boxed{}$$

Wenn die Spielfigur noch 4 Felder vom Ziel entfernt ist, gibt es 3 Optionen:

- Du bewegst die Spielfigur 1 Feld vorwärts. Dann ist sie noch 3 Felder vom Ziel entfernt.
- Du bewegst die Spielfigur 2 Felder vorwärts. Dann ist sie noch 2 Felder vom Ziel entfernt.
- Du bewegst die Spielfigur 3 Felder vorwärts. Dann ist sie noch 1 Feld vom Ziel entfernt.

3) Wie kannst du also a_4 mithilfe von a_1 , a_2 und a_3 berechnen?

Allgemein gilt für alle $n \geq 4$ das folgende rekursive Bildungsgesetz: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

4) Berechne mithilfe dieser Rekursion die gesuchte Anzahl a_{10} .

$$a_5 = \boxed{} \quad a_6 = \boxed{} \quad a_7 = \boxed{} \quad a_8 = \boxed{} \quad a_9 = \boxed{} \quad a_{10} = \boxed{}$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) sind rekursiv gegeben:

- $a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_1 = 1$
- $b_{n+1} = a_n \cdot b_n$ mit $b_1 = 1$

a) Ermittle die ersten 5 Folgenglieder von (a_n) und (b_n) .

$$a_2 = \boxed{} \quad a_3 = \boxed{} \quad a_4 = \boxed{} \quad a_5 = \boxed{}$$

$$b_2 = \boxed{} \quad b_3 = \boxed{} \quad b_4 = \boxed{} \quad b_5 = \boxed{}$$

Rechts siehst du, wie man mit einer [Tabellenkalkulation](#) auf Knopfdruck die ersten 12 Folgenglieder der Fibonacci-Folge rekursiv berechnen kann.

b) Berechne mit einer Tabellenkalkulation: $b_{10} = \boxed{}$

▼ Tabelle		
f_x	F	K
	A	B
1		1
2		1
3	=A1 + A2	
4		3
5		5
6		8
7		13
8		21
9		34
10		55
11		89
12		144

